Distributionale Konvergenzsätze in unendlicher Ergodentheorie

von Mehdi Slassi

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften

– Dr. rer. nat. –

Vorgelegt im Fachbereich 3 (Mathematik & Informatik)

der Universität Bremen

im Dezember 2005

Datum des Promotionskolloquiums: 24.02.2006

Gutachter: Prof. Dr. Marc Keßeböhmer (Universität Bremen)
Prof. Dr. Manfred Denker (Georg-August-Universität Göttingen)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

A mes parents,
A mes grand-parents,
A mes arrière-grand-parents,
A mes arrière-arrière-grand-parents,
$\vdots$

Das Wort *ergodisch* ist eine Amalgamierung der griechischen Wörter *ergon* (Arbeit) und *odos* (Weg). Dieses Wort wurde von BOLTZMANN zur Formulierung seiner Ergodenhypothese eingeführt. Diese behauptet, dass die Trajektorie eines Zustandes im Phasenraum jeden Punkt auf der Hyperfläche konstanter Energie durchläuft. Diese Hypothese ist zwar in dieser Fassung falsch, stellt jedoch den eigentlichen Beginn der *Ergodentheorie* dar. Mit der Entwicklung der Maßtheorie Anfang 1930 präsentierten erst J. VON NEUMANN [**vN32**] und kurz darauf G. D. BIRKHOFF [**Bir31**] die ersten Ergodensätze, die im Wesentlichen besagen, dass die Zeitmittel von Zustandsgrößen gleich ihrer Mittel über dem Phasenraum sind.

Die moderne Ergodentheorie untersucht das Langzeitverhalten dynamischer Systeme mittels Methoden der Maßtheorie. Dabei betrachtet man ein maßtheoretisches dynamisches System bestehend aus einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$, wobei μ σ-endlich ist, und einer nichtsingulären Transformation $T : X \to X$. Ist μ endlich, so spricht man von *endlicher* Ergodentheorie, ist μ unendlich, von *unendliche*r Ergodentheorie. Für ein ergodisches maßtheoretisches dynamisches System $(X, T, \mathcal{A}, \mu)$, wobei μ ein endliches T-invariantes Maß ist, besagt der Neumannsche Ergodensatz Folgendes:

$$\left\| \frac{S_n f}{n} - \frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu \right\|_2 \longrightarrow 0 \quad \text{für alle } f \in L_2(\mu).$$

Der individuelle Ergodensatz von BIRKHOFF besagt:

$$\frac{S_n f}{n} \longrightarrow \frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu \quad \text{fast sicher (f. s.)} \quad \text{für alle } f \in L_1(\mu).$$

Dabei bezeichnet $S_n f := \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ die so genannte ergodische Summe.

Die unendliche Ergodentheorie wurde wesentlich von E. HOPF (vgl. [**Hop37**]) beeinflusst. Davon zeugt sowohl sein Ergodensatz für Transformationen mit einem unendlichen σ-endlichen invarianten Maß, als auch die nach ihm benannte Zerlegung eines Systems in einen konservativen und dissipativen Teil. Die unendliche Ergodentheorie war lange Zeit unstrukturiert, bis in den 1980er Jahren J. AARONSON (vgl. [**Aar97**]) die Theorie systematisierte und unter anderen Begriffe wie „punktweise dual ergodisch" prägte.

Als Beispiel für die unendliche Ergodentheorie betrachten wir die Tangensfunktion $\tan : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan(x)$. Dieses Beispiel wurde durch eine Frage in den Ingenieurwissenschaften motiviert und ist gut geeignet, den Charakter der Grenzwertsätze der unendlichen Ergodentheorie zu demonstrieren. Durch $(\mathcal{B}, \lambda, \mathbb{R}, \tan)$ wird ein maßtheoretisches dynamisches System definiert, wobei λ das Lebesgue-Maß auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}$ bezeichnet. Es sei X_0 eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}$ und Wahrscheinlichkeitsdichte f bezüglich λ und $X_n := \tan^n(X_0)$ für $n \geq 0$. Dann lässt sich X_0 als zufälliger Startpunkt und X_n als Zustand des Systems nach der n-ten Iteration interpretieren. Damit besitzt X_n eine Wahrscheinlichkeitsdichte, die mit $\hat{P}^n(f)$ bezeichnet wird, d.h.

$$\text{Prob}(X_n \in A) = \int_A \hat{P}^n(f)\ d\lambda, \qquad A \in \mathcal{B},\ n \geq 0.$$

Dabei bezeichnet $\hat{P}$ den Frobenius-Perron-Operator bzgl. λ. Ferner ist die Tangensfunktion gemäß [**Aar97**, Korollar 6.4.2] eine exakte Transformation und besitzt ein unendliches σ-endliches invariantes Maß μ mit der Dichte $\frac{d\mu}{d\lambda}(x) = 1/x^2$. Damit ergibt sich (vgl. [**Tha95**]), dass

$$\int_A \hat{P}^n(f)\ d\lambda \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{B} \text{ mit } \mu(A) < \infty$$

und folglich

$$\text{Prob}(|\tan^n(X_0)| > \varepsilon) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty) \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Dies zeigt, dass der Iterationsprozess $(\tan^n(X_0))$ bzgl. jeder absolut stetigen Startverteilung stochastisch gegen 0 konvergiert.

Für die folgenden Diskussionen sei $(\mathcal{A}, \mu, X, T)$ ein ergodisches konservatives invariantes maßtheoretisches dynamisches System. Dann gilt für alle $f \in L_1^+(\mu)$

$$S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \ \uparrow \infty \qquad \text{f. s.}$$

Dabei bezeichnet $L_1^+(\mu)$ den Raum aller μ-f. s. nichtnegativen, integrierbaren Funktionen f mit $\int_X f\ d\mu > 0$. Auch bei einem unendlichen Maß μ interessiert man sich für das asymptotische Verhalten der ergodischen Summe $S_n f$. Für ein beliebiges

σ-endliches Maß gilt nach dem Ergodensatz von HOPF, dass für alle $f, g \in L_1(\mu)$ mit $g > 0$

$$\frac{S_n f}{S_n g} \longrightarrow \frac{\int_X f \, d\mu}{\int_X g \, d\mu} \qquad \text{f. s.} \tag{0.0.1}$$

Wählt man in (0.0.1) $g > 0$ mit $\int_X g \, d\mu = 1$, so bedeutet dies, dass die Divergenzrate von $S_n f(x)$ nicht von f, aber möglicherweise von x abhängt. Falls μ endlich ist, liefert der individuelle Ergodensatz von BIRKHOFF, dass die Divergenzrate von $S_n f(x)$ sowohl von f als auch von x unabhängig ist. Setzt man aber voraus, dass $\mu(X) = \infty$ ist, so gilt stets

$$\frac{S_n f}{n} \longrightarrow 0 \qquad \text{f. s.} \quad \text{für alle } f \in L_1^+(\mu)\,.$$

Außerdem gibt es gemäß [**Aar97**, Theorem 2.4.1] keine Normierungsfolge (a_n) positiver Zahlen, so dass

$$\frac{S_n f}{a_n} \longrightarrow \int_X f \, d\mu \qquad \text{f. s.} \quad \text{für alle } f \in L_1^+(\mu)\,.$$

Jedoch besagt das Darling-Kac-Theorem (vgl. [**Aar97**, Theorem 3.6.4]), dass immer eine gewisse Normierungsfolge (a_n) existiert, so dass für alle $f \in L_1^+(\mu)$ der Prozess $S_n f / a_n$ in einem schwächeren Sinn gegen eine nicht degenerierte Zufallsvariable konvergiert. Diese Tatsachen sind grundlegend für die Entwicklung der unendlichen Ergodentheorie.

Sowohl für die endliche wie auch für die unendliche Ergodentheorie spielt die *Kac-Formel* (vgl. [**Aar97**, Kapitel 1.5]) eine zentrale Rolle; für $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < \infty$ gilt

$$\begin{aligned} \mu(A)\,\mathbb{E}(\varphi|A) &= \int_A \varphi \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mu(A \cap \{\varphi = n\}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A \cap \{\varphi > n\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(X)\,, \end{aligned} \tag{0.0.2}$$

wobei $\varphi(x) := \varphi_A(x) := \min\{n \geq 1 : T^n(x) \in A\}$, $x \in X$, die *Treffer- oder Rückkehrzeit* bezeichnet und $A_n := \bigcup_{k=0}^{n} T^{-k} A$. Für die endliche Ergodentheorie bedeutet die Kac-Formel, dass die mittlere Rückkehrzeit nach A proportional zum Kehrwert von $\mu(A)$ ist. Hingegen stellt sich für die unendliche Ergodentheorie heraus, dass die Divergenzrate der Reihe bzw. der Folge in (0.0.2) von zentraler Bedeutung für die distributionalen Grenzwertsätze in der unendlichen Ergodentheorie ist.

In dieser Arbeit werden wir uns mit konservativen ergodischen invarianten maßtheoretischen dynamischen Systemen $(\mathcal{A}, \mu, X, T)$ beschäftigen, wobei μ stets ein unendliches σ-endliches Maß bezeichnet. Wir betrachten für $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < \infty$

den *Erneuerungsprozess* $(Z_n)_{n\geq 0}$, definiert durch

$$Z_0 \equiv 0, \quad Z_n(x) := \begin{cases} \max\{k \leq n : \ T^k(x) \in A\}, & x \in A_n, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad n \geq 1$$

und untersuchen das Konvergenzverhalten ausgesuchter von Z_n abgeleiteter Rückkehrzeitprozesse. Für eine regulär variierende Funktion (r. v. F.) F für $x \to \infty$ (vgl. Anhang, Definition 4.3.1) nennen wir die Prozesse

$$\frac{F(Z_n)}{F(n)} \quad \text{und} \quad \frac{F(n - Z_n)}{F(n)}$$

(durch F) *verzerrte Rückkehrzeitprozesse*. Insbesondere definiert man den *normalisierten Kac-Prozess* als

$$\Phi_n := \frac{\sum_{k=0}^{Z_n} \mu(A \cap \{\varphi > k\})}{\mu(A_n)}$$

bzw. den *normalisierten Verbrachte-Zeit-Kac-Prozess* als

$$\Psi_n := \frac{\sum_{k=0}^{n-Z_n} \mu(A \cap \{\varphi > k\})}{\mu(A_n)}.$$

Falls A eine *uniforme Menge* und die *Wander-Rate* $W_n(A) := \mu(A_n)$ eine regulär variierende Folge (r. v. F.) mit Exponent $(1-\alpha) \in [0,1]$ ist, so zeigt THALER [**Tha98**], dass der Prozess Z_n/n *streng in Verteilung* gegen die Zufallsvariable ξ_α mit Werten in $[0,1]$ und Dichte

$$f_{\xi_\alpha}(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{1}{x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha}, \qquad 0 < x < 1$$

für $\alpha \in (0,1)$ und $\xi_0 = 0, \ \xi_1 = 1$ konvergiert. Insbesondere genügt der Prozess Z_n für $\alpha = 1/2$ dem Arcus-Sinus-Gesetz im Sinne von DYNKIN und LAMBERTI (vgl. [**Dyn61**], [**Lam58**]). Das Ziel der hier vorliegenden Arbeit ist es, distributionale Grenzwertsätze für Rückkehrzeitprozesse (verzerrte Rückkehrzeitprozesse bzw. Kac-Prozesse) unter geeigneten Voraussetzungen zu beweisen. Es werden Verzerrungen entwickelt, so dass man für die kritischen Fälle $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ nicht degenerierte Resultate erhält. Dabei wird ein Gleichverteilungsgesetz für den Erneuerungsprozess Z_n für den Fall $\alpha = 0$ (Theorem 3.2.6) sowie für den normalisierten Verbrachte-Zeit-Kac-Prozess Ψ_n im Falle $\alpha = 1$ (Theorem 3.3.3) bewiesen. Ferner wird der Zusammenhang zwischen der unendlichen Ergodentheorie und der Theorie der Kettenbrüche hergestellt, welches zu neuen zahlentheoretischen Ergebnissen führt. Dabei spielt die Farey-Intervallabbildung eine fundamentale Rolle. Einige der Ergebnisse liegen als Preprint vor (vgl. [**KS59**] bzw. [**KS09**]).

Der Aufbau dieser Arbeit stellt sich wie folgt dar:
Im ersten Kapitel, welches sich in zwei Teilkapitel gliedert, werden die begrifflichen

Grundlagen der Arbeit gelegt. Teilkapitel 1.1 führt in die unendliche Ergodentheorie ein und stellt Ergebnisse bereit, die für den Fortgang der Arbeit von Relevanz sind. Im Teilkapitel 1.2 werden uniforme Mengen definiert und die Thaler-Intervallabbildungen I diskutiert. Diese Intervallabbildungen besitzen unendliche σ-endliche invariante Maße und garantieren die Existenz uniformer Mengen. Als wichtiges Beispiel dieser Klasse von Intervallabbildungen wird die Farey-Abbildung untersucht (vgl. Teilkapitel 4.1).

Im zweiten Kapitel werden *uniforme Rückkehrmengen* eingeführt. Die Eigenschaften solcher Mengen werden später dazu genutzt, konkrete Konvergenzaussagen für den normalisierten Verbrachte-Zeit-Kac-Prozess (vgl. Theorem 3.3.3) sowie für den Fluktuationsprozess der Quersumme von Kettenbrüchen (vgl. Theorem 4.2.3) zu beweisen. Das erste Teilkapitel stellt einen Typus von Intervallabbildungen (Thaler-Intervallabbildungen II) mit indifferentem Fixpunkt bei 0 und zwei wachsenden vollen Zweigen vor. Dabei wird das asymptotische Verhalten der Folge $(\hat{P}^n)_{n\geq 0}$ untersucht. Diese Klasse von Intervallabbildungen motiviert dann im zweiten Teilkapitel den neuen Begriff uniformer Rückkehrmengen. Dabei werden diese Mengen inklusive ihrer Eigenschaften behandelt. Es wird gezeigt, dass jede uniforme Rückkehrmenge stets eine uniforme Menge ist. Eine Umkehrung dieser Aussage liefert die Proposition 2.2.4 unter zusätzlichen Voraussetzungen. Mit Hilfe dieser Proposition wird später im Kapitel 4 bewiesen, dass das Intervall $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ eine uniforme Rückkehrmenge für die Farey-Intervallabbildung ist, was den Grundstein für die zahlentheoretischen Anwendungen legt.

Kapitel 3 befasst sich mit Konvergenzaussagen für Rückkehrzeitprozesse bzgl. Mengen, die die Eigenschaften aus Teilkapitel 1.2 bzw. Teilkapitel 2.2 erfüllen (uniforme Mengen bzw. uniforme Rückkehrmengen). Im ersten Teilkapitel wird zunächst in Proposition 3.1.3 gezeigt, dass, falls der Prozess Y_n/n in Verteilung gegen eine Zufallsvariable Y konvergiert mit Werten in $[0, \infty]$ und ohne Atome bei 0 oder ∞, der verzerrte Prozess $F\left(Y_n\right)/F(n)$ für jede r. v. F. F mit Exponent $\beta \in \mathbb{R}$ auch in Verteilung gegen die Zufallsvariable Y^β konvergiert. Dieses wahrscheinlichkeitstheoretische Resultat wird dann dazu verwendet, die Konvergenzaussagen im Theorem 3.1.4 für die Kac-Prozesse in dem Fall zu beweisen, dass die Wander-Rate eine r. v. F. mit geeignetem Exponenten $(1-\alpha) \in [0, 1]$ ist. Dabei genügen die Kac-Prozesse für $\alpha = 1/2$ dem Arcus-Sinus-Gesetz. Im zweiten Teilkapitel werden verzerrte Rückkehrzeitprozesse $F\left(Z_n\right)/F\left(n\right)$, wobei F eine r. v. F. mit Exponent $\beta \geq 0$ ist, für den Fall untersucht, dass die Wander-Rate eine r. v. F. mit Exponent 1 ist. Da Z_n/n in diesem Fall streng in Verteilung gegen 0 konvergiert, liefert das oben erwähnte wahrscheinlichkeitstheoretische Resultat keine Aussagen über das asymptotische Verhalten der

Prozesse $F(Z_n)/F(n)$. Für $\beta > 0$ wird dann mit Hilfe der Methode der Momente im Theorem 3.2.4 gezeigt, dass $F(Z_n)/F(n)$ lokal stochastisch bzgl. μ gegen 0 konvergiert. Dazu wird zunächst die Proposition 3.2.2 entwickelt, welche sowohl eine entscheidende Rolle bei der Beweisführung des oben erwähnten Theorems 3.2.4 spielt, als auch von eigenem Interesse für die Theorie der regulären Variation ist. Insbesondere konvergiert der normalisierte Kac-Prozess Φ_n streng in Verteilung gegen 0. Für den Fall $\beta = 0$ konvergiert der Prozess $Z_n/(n\Phi_n)$ streng in Verteilung gegen die auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable $\boldsymbol{U}$ (vgl. Korollar 3.2.7). Teilkapitel 3.3 widmet sich dem Konvergenzverhalten von normalisierten Verbrachte-Zeit-Kac-Prozessen Ψ_n für den Fall, dass die Wander-Rate $W_n(A)$ eine langsam variierende Folge ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass A eine uniforme Rückkehrmenge ist. Mit Hilfe der Eigenschaften solcher Mengen wird dann im Theorem 3.3.3 gezeigt, dass der Prozess Ψ_n dem Gleichverteilungsgesetz genügt. Dies heißt, dass Ψ_n streng in Verteilung gegen die auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable $\boldsymbol{U}$ konvergiert. Dieser Grenzwertsatz wird ferner im nächsten Kapitel dazu genutzt, die Konvergenzaussage im Theorem 4.2.3 für den Fluktuationsprozess der Quersumme von Kettenbrüchen zu folgern.

Das letzte Kapitel ist der zahlentheoretischen Anwendung gewidmet. Dabei wird durch die Farey-Intervallabbildung der Zusammenhang zwischen der unendlichen Ergodentheorie und der Theorie der Kettenbrüche hergestellt. In der Tat besitzt die Farey-Intervallabbildung die Eigenschaft, dass die induzierte Transformation auf der uniformen Menge $K_1 := \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ mit der Gauß-Abbildung übereinstimmt. Somit lassen sich die Rückkehrzeiten nach K_1 durch die Eingänge der Kettenbruchentwicklung ausdrücken. Dabei werden wir das Fluktuationsverhalten des Prozesses $(X_n)_{n\geq 1}$, gegeben durch

$$X_n(x) := \max\left\{\sum_{i=1}^{p} k_i(x) \ : \ \sum_{i=1}^{p} k_i(x) \leq n,\ p \in \mathbb{N}_0\right\}, \quad x \in \mathbb{I},$$

untersuchen. Im Teilkapitel 4.1 werden die dynamischen Eigenschaften der Farey-Abbildung behandelt. Es wird mit Hilfe des Lemmas 4.1.1 sowie der Proposition 2.2.4 gezeigt, dass K_1 eine uniforme Rückkehrmenge ist. Im Teilkapitel 4.2 wird schließlich demonstriert, wie sich die Konvergenzaussage für den normalisierten Verbrachte-Zeit-Kac-Prozess im Theorem 3.3.3 auf den Fluktuationsprozess $(n - X_n)_{n\geq 1}$ übertragen lässt. Ferner wird ein Gesetz der großen Deviationen für den Prozess $(n - X_n)_{n\geq 1}$ bewiesen, welches präzise Informationen über die Verteilung von $(n - X_n)/n$ für große n gibt.

Danksagung. An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Dr. Marc Keßeböhmer meinen Dank für die engagierte Betreuung und Fürsorge während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Bremen aussprechen. Darüber hinaus geht mein herzlicher Dank an Frau A. K. Petersen, Frau J. Ried, Frau J. Bohnstengel und Frau L. Borgmann für ihr sorgfältiges Korrekturlesen der Arbeit sowie für ihre wertvollen Verbesserungsvorschläge. Nicht zuletzt gebührt meinen Eltern und Geschwistern mein besonderer Dank für ihre wohlwollende und stets tatkräftige Unterstützung.

KAPITEL 1

Grundlegende Begriffe und Sätze

In diesem Kapitel werden die Grundzüge der unendlichen Ergodentheorie in dem Umfang beschrieben, wie dies für das Verständnis und als Grundlage für den weiteren Verlauf dieser Arbeit notwendig ist. Für weitere Details verweisen wir auf die Lehrbücher [**Aar97**] und [**Den05**, Teilkapitel 5.6].

Im Folgenden bezeichnet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ stets einen Maßraum, wobei μ ein unendliches σ-endliches Maß ist.

1.1. Maßtheoretische dynamische Systeme

DEFINITION 1.1.1. Eine messbare Transformation $T : X \to X$ auf dem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt:

(1) *nichtsingulär,* falls $\mu\left(T^{-1}(A)\right) = 0$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ gilt;
(2) μ*-invariant,* falls $\mu\left(T^{-1}(A)\right) = \mu(A)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt.

Eine nichtsinguläre Transformation T auf dem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *ergodisch,* falls gilt:

$$A \in \mathcal{A},\ T^{-1}(A) = A \bmod \mu \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = 0 \quad \text{oder} \quad \mu(X \backslash A) = 0.$$

NOTATION 1.1.2. Mit $(\mathcal{A}, \mu, X, T)$ wird ein *maßtheoretisches dynamisches System* bezeichnet, wobei T eine nichtsinguläre Transformation ist.

DEFINITION 1.1.3. Sei $(\mathcal{A}, \mu, X, T)$ ein maßtheoretisches dynamisches System.

(1) Eine messbare Menge $W \subset X$ nennt man *wandernd,* falls die Familie $\{T^{-n}(W) : n \in \mathbb{N}_0\}$ aus paarweise disjunkten Mengen besteht.
(2) Eine messbare Menge $D \subset X$ mit der Eigenschaft, dass jede wandernde Menge positiven Maßes f. s. in D enthalten ist, heißt der *dissipative* Teil des Systems (bzgl. der Transformation T) und wird mit $D(T)$ bezeichnet. Ihr Komplement $\mathcal{C}(T) := X \backslash D(T)$ nennt man den *konservativen* Teil des Systems.
(3) Die Transformation T heißt *konservativ*, falls $\mathcal{C}(T) = X \bmod \mu$.

THEOREM 1.1.4 (Maharams Satz [**Aar97**], Theorem 1.1.7). *Es sei* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *ein maßtheoretisches dynamisches System*, wobei T μ*-invariant ist. Falls es eine messbare Menge* A *mit* $\mu(A) < \infty$ *gibt, so dass*

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A) \quad \textit{mod } \mu$$

gilt, dann ist T *konservativ.*

DEFINITION 1.1.5. Gegeben seien ein maßtheoretisches dynamisches System $(\mathcal{A}, \mu, X, T)$ und der Raum $L_1(\mu)$ aller reellwertigen μ-integrierbaren Funktionen auf X. Dann heißt die lineare Abbildung

$$\hat{T} : L_1(\mu) \longrightarrow L_1(\mu), \ f \longmapsto \hat{T}(f) := \frac{d\left(\nu_f \circ T^{-1}\right)}{d\mu},$$

wobei ν_f das signierte Maß mit Dichte f bezüglich μ bezeichnet, *Transfer-Operator* (manchmal auch *Frobenius-Perron-Operator* genannt). Er ist durch

$$\int_X \hat{T}(f) \cdot g \, d\mu = \int_X f \cdot g \circ T \, d\mu \quad \text{für alle } f \in L_1(\mu) \text{ und } g \in L_\infty(\mu)$$

eindeutig bestimmt. Dabei bezeichnet $L_\infty(\mu)$ den Raum aller reellwertigen messbaren μ-f. s. beschränkten Funktionen auf X.

Offensichtlich lässt sich der Definitionsbereich des Transfer-Operators auf den Raum der nichtnegativen messbaren Funktionen ausdehnen.

PROPOSITION 1.1.6 ([**Aar97**], Proposition 1.2.2, 1.3.2). *Für ein maßtheoretisches dynamisches System* $(\mathcal{A}, \mu, X, T)$ *sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(1) T *ist konservativ und ergodisch.*
(2) *Für alle* $f \in L_1^+(\mu) := \left\{f \in L_1(\mu) : \ f \geq 0 \ \mu\text{-f. s.}, \ \int_X f \, d\mu > 0\right\}$ *gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f \circ T^n = \infty \quad \mu\text{-f. s.}$$

(3) *Für alle* $f \in L_1^+(\mu)$ *gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}^n(f) = \infty \quad \mu\text{-f. s.}$$

Dabei bezeichnet $T^n = T \circ T^{n-1}$ bzw. $\hat{T}^n = \hat{T} \circ \hat{T}^{n-1}$ *die induktiv definierte* n*-te Iterierte von* T *bzw.* $\hat{T}$ $(n \geq 1)$ *mit* $T^0 = \text{id.}$ *bzw.* $\hat{T}^0 = \text{id.}$

Bei der Untersuchung eines stochastischen Prozesses, der durch eine nichtsinguläre Transformation definiert ist, stellt sich die Frage, inwiefern sein asymptotisches Verhalten von der Startverteilung abhängt. In dieser Situation ist der *Kompaktheitssatz* von AARONSON hilfreich; dieser besagt, dass die Konvergenz in Verteilung bezüglich *eines* absolut stetigen Wahrscheinlichkeitsmaßes unter geeigneten Voraussetzungen zu demselben asymptotischen Verhalten bezüglich *aller* absolut stetigen Wahrscheinlichkeitsmaße führt.

NOTATION 1.1.7. Mit

$$\mathcal{P}_\mu := \{\nu : \nu \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } \mathcal{A} \text{ mit } \nu \ll \mu\}$$

wird der Raum der bezüglich μ absolut stetigen Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Messraum $(X, \mathcal{A})$ bezeichnet. Diese Wahrscheinlichkeitsmaße stellen die zulässigen Startverteilungen für die durch die Iteration von T definierten Prozesse dar.

Das Symbol $\mathcal{P}_\mu$ wird auch zur Bezeichnung der Menge der zugehörigen Dichten verwendet.

DEFINITION 1.1.8. Es seien $(\mathcal{A}, \mu, X)$ ein σ-endlicher Maßraum, $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ $(n \geq 1)$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen und Y eine Zufallsvariable mit Werten in $[-\infty, \infty]$ (nicht unbedingt auf X definiert).

(1) Sei ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$. Die Folge (f_n) heißt konvergent *in Verteilung* bzgl. ν gegen Y, kurz $f_n \xrightarrow{\nu} Y$, falls

$$\int_X g \circ f_n \, d\nu \longrightarrow \mathbb{E}\left(g\left(Y\right)\right) \quad \text{für alle } g \in \mathcal{C}\left([-\infty, \infty]\right).$$

(2) Die Folge (f_n) heißt *streng* konvergent in Verteilung gegen Y, kurz $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)} Y$, falls

$$f_n \xrightarrow{\nu} Y \qquad \text{für alle } \nu \in \mathcal{P}_\mu.$$

BEMERKUNG 1.1.9. Insbesondere gilt für $c \in [-\infty, \infty]$ Folgendes: f_n konvergiert genau dann streng in Verteilung gegen c, wenn f_n *lokal stochastisch* bzgl. μ gegen c konvergiert, kurz $f_n \xrightarrow[\text{lok. stoch.}]{\mu} c$.

THEOREM 1.1.10 (Kompaktheitssatz [**Aar97**], Prop. 3.6.1). *Sind* $(\mathcal{A}, \mu, X, T)$ *ein ergodisches maßtheoretisches dynamisches System,* Y *eine Zufallsvariable mit Werten in* $[-\infty, \infty]$ *und* $f_n : X \to [-\infty, \infty]$ $(n \geq 1)$ *eine Folge von messbaren numerischen Funktionen, so dass*

$$f_n \circ T - f_n \xrightarrow[\text{lok. stoch.}]{\mu} 0.$$

Dann gilt folgende Äquivalenz:

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)} Y \quad \Longleftrightarrow \quad f_n \xrightarrow{\nu} Y \quad \textit{für ein gewisses } \nu \in \mathcal{P}_\mu.$$

1.2. Uniforme Mengen

Von nun an wird für den weiteren Verlauf dieser Arbeit stets vorausgesetzt, dass $(\mathcal{A}, \mu, X, T)$ ein konservatives ergodisches invariantes dynamisches System ist. Insbesondere bedeutet dies nach der *Kac-Formel*, dass der Mittelwert der Rückkehrzeit zu einer Menge endlichen positiven Maßes *unendlich* ist.

In dieser Arbeit verwenden wir die Konvention $\min \emptyset := \infty$ und $\max \emptyset := 0$.

DEFINITION 1.2.1. Für eine messbare Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) > 0$ sei

$$\varphi(x) := \varphi_A(x) := \min\{n \geq 1 : T^n(x) \in A\}, \quad x \in X. \tag{1.2.1}$$

Für $x \notin A$ heißt φ die *erste Trefferzeit* von A; für $x \in A$ heißt φ die *erste Rückkehrzeit* nach A.

BEMERKUNG 1.2.2. Für eine messbare Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < \infty$ ist es sinnvoll, φ als Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(X, \mathcal{A}, \mu_A)$ zu betrachten, wobei $\mu_A(E) := \frac{\mu(A \cap E)}{\mu(A)}$, $E \in \mathcal{A}$. Dann erhält man nach der Kac-Formel

$$\mathbb{E}(\varphi | A) = \int \varphi \, d\mu_A = \frac{\mu(X)}{\mu(A)} = \infty.$$

Eine zentrale Rolle in dieser Arbeit spielt des Weiteren die Wander-Rate.

DEFINITION 1.2.3. Für $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < \infty$ sei $A_n := \bigcup_{k=0}^n T^{-k} A$. Dann heißt die Folge

$$W_n := W_n(A) := \mu(A_n), \qquad n \geq 0$$

die ***Wander-Rate*** von A.

BEMERKUNG 1.2.4. Es ist zu bemerken, dass für alle $\nu \in \mathcal{P}_\mu$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \nu(A_n) = 1 \quad \text{und} \quad \nu(\{\varphi < \infty\}) = 1,$$

da T konservativ und ergodisch ist.

Ferner wird der Zusammenhang zwischen der Wander-Rate und der Rückkehrzeit durch die folgenden Gleichungen hergestellt:

$$W_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \mu(A \cap \{\varphi > k\}) = \int_A \min(\varphi, n+1) \, d\mu \quad (n \geq 0).$$

Für den weiteren Verlauf der Untersuchung wird folgende Definition benötigt:

DEFINITION 1.2.5. Eine messbare Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < \infty$ heißt *uniform für* $f \in \mathcal{P}_\mu$, falls es eine positive reelle Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ gibt, so dass

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{T}^k(f) \longrightarrow 1 \qquad \mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A.$$

Die Menge A heißt *uniforme Menge*, falls sie uniform für ein gewisses $f \in \mathcal{P}_\mu$ ist.

Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit benötigen wir folgende Notation:

NOTATION 1.2.6. Gegeben seien zwei nichtnegative Folgen (a_n) und (b_n).

- $a_n \sim b_n \quad :\Leftrightarrow \quad b_n > 0$ für alle $n \geq n_0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.
- $a_n = o(b_n) \quad :\Leftrightarrow \quad b_n > 0$ für alle $n \geq n_0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.
- $a_n = \mathcal{O}(b_n) \quad :\Leftrightarrow \quad b_n > 0$ für alle $n \geq N$ und $\sup_{n\geq N} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) < \infty$.

DEFINITION 1.2.7. Die Transformation T heißt *punktweise dual ergodisch*, falls es eine Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ positiver Zahlen gibt, so dass

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n-1} \hat{T}^k(f) \longrightarrow \int f\, d\mu \qquad \text{f. s. für alle } f \in L_1(\mu).$$

Die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ wird *Rekurrenzfolge* von T genannt.

BEMERKUNG 1.2.8. Die Rekurrenzfolge $(b_n)_{n\geq 1}$ ist bis auf einen Proportionalitätsfaktor und asymptotische Äquivalenz eindeutig bestimmt. Ferner gilt

$$b_n \longrightarrow \infty \quad \text{und} \quad \frac{b_n}{n} \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

PROPOSITION 1.2.9 ([**Aar97**], Prop. 3.7.5). *Falls für ein gewisses $f \in L_1^+(\mu)$ und eine Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ positiver Zahlen gilt*

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=0}^{n-1} \hat{T}^k(f) \longrightarrow \int f\, d\mu \qquad \text{f. s.}$$

auf einer Menge $B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) > 0$, dann ist T punktweise dual ergodisch.

BEMERKUNG 1.2.10. Aus der Proposition 1.2.9 und dem Satz von Egorov (vgl. [**Els96**, Seite, 250]) folgt, dass T genau dann punktweise dual ergodisch ist, wenn sie uniforme Mengen besitzt.

Im Folgenden werden als wichtiges Beispiel die von THALER eingeführten Intervallabbildungen betrachtet, die zur Existenz von unendlichen σ-endlichen invarianten Maßen sowie uniformen Mengen führen.

BEISPIEL 1.2.11 (Thaler-Intervallabbildungen I [**Tha83**]). Sei $\xi = \{B(i) : i \in I\}$ eine endliche oder unendliche Familie von paarweise disjunkten Teilintervallen von $[0, 1]$ mit $\lambda\left(\bigcup_{i\in I} B(i)\right) = 1$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}_{[0,1]}$ bezeichnet. Sei $T : [0, 1] \to [0, 1]$ eine Abbildung, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Für alle $i \in I$ ist $T|_{B(i)}$ zweimal differenzierbar und es gilt $\overline{T(B(i))} = [0,1]$;
(2) Es gibt eine nichtleere endliche Teilmenge $J \subset I$ derart, dass $B(j)$ für jedes $j \in J$ genau einen *indifferenten Fixpunkt* x_j (d.h. ein Fixpunkt mit $T'(x_j) = 1$) enthält;
(3) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine reelle Zahl $\rho(\varepsilon) > 1$, so dass für alle $x \in \bigcup_{i\in I} B(i) \setminus \bigcup_{j\in J}(x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon)$ gilt $|T'(x)| \geq \rho(\varepsilon)$;
(4) Es gibt ein $\eta > 0$, so dass für $j \in J$ T' auf $(x_j - \eta, x_j) \cap B(j)$ fällt und auf $(x_j, x_j + \eta) \cap B(j)$ wächst;
(5) $\frac{|T''|}{(T')^2}$ ist auf $\bigcup_{i\in I} B(i)$ beschränkt.

Wie von THALER ([**Tha80**] bzw. [**Tha83**]) gezeigt ist T eine konservative ergodische Transformation bezüglich λ und hat ein eindeutiges unendliches σ-endliches invariantes Maß μ, welches zu λ äquivalent ist (d.h. $A \in \mathcal{B}_{[0,1]},\ \mu(A) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda(A) = 0$). Ferner besitzt die Dichte $\frac{d\mu}{d\lambda}$ eine Version h der Gestalt

$$h(x) = h_0(x) \prod_{j\in J} \frac{x - x_j}{x - u_j(x)} \quad \text{für alle } x \in [0,1] \setminus \{x_j :\ j \in J\},$$

wobei $u_j := \left(T|_{B(j)}\right)^{-1}$ $(j \in J)$ und h_0 eine stetige positive Funktion auf $[0,1]$ ist.

PROPOSITION 1.2.12 ([**Tha95**]). *Es sei $T : [0,1] \to [0,1]$ eine Thaler-Intervallabbildung I. Dann gibt es eine Folge (b_n) positiver Zahlen derart, dass für alle Riemann-integrierbaren Funktionen u auf $[0,1]$ gilt*

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{P}^k(u) \longrightarrow \left(\int u \, d\lambda\right) h$$

*gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $[0,1] \setminus \{x_j :\ j \in J\}$. Dabei bezeichnet $\hat{P}$ den Frobenius-Perron-Operato*r *bzgl. λ.*

KOROLLAR 1.2.13. *Unter den Voraussetzungen der Proposition 1.2.12 folgt wegen*

$$\hat{T}^n(f) = \frac{1}{h} \hat{P}^n(f \cdot h) \quad \textit{für alle } f \in L_1(\mu) \textit{ und } n \geq 0,$$

dass jede messbare Menge $A \in \mathcal{B}_{[0,1]}$ mit $\lambda(A) > 0$, die von den indifferenten Fixpunkten weg beschränkt ist, eine uniforme Menge ist.

BEMERKUNG 1.2.14 ([**Tha95**]). Es sei T eine Thaler-Intervallabbildung I, so dass zusätzlich für alle $j \in J$

$$T(x) = x \mp a_j |x - x_j|^{p_j+1} + o\left(|x - x_j|^{p_j+1}\right) \quad (x \to x_j),$$

mit $a_j > 0$ und $p_j \geq 1$. Dann gilt für $p := \max\{p_j : \ j \in J\}$

$$b_n \sim const \cdot \begin{cases} \frac{n}{\log(n)}, & p = 1, \\ n^{1/p}, & p > 1. \end{cases}$$

Das folgende wichtige Resultat wird in den nächsten Kapiteln benötigt. Für Definitionen und weitere Details zu regulär variierenden Funktionen bzw. Folgen wird auf den Anhang verwiesen.

PROPOSITION 1.2.15 ([**Aar97**], Prop. 3.8.7). *Für eine uniforme Menge A gilt: Die Normierungsfolge (b_n) ist genau dann eine regulär variierende Folge (r. v. F.) mit Exponent α, wenn (W_n) eine r. v. F. mit Exponent $(1-\alpha)$ ist. In diesem Fall gilt $\alpha \in [0,1]$ und*

$$b_n W_n \sim \frac{n}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(2-\alpha)} \qquad (n \to \infty). \tag{1.2.2}$$

KOROLLAR 1.2.16. *Ist (b_n) (bzw. $(W_n(A))$) eine r. v. F., dann gilt*

$$W_n(A) \sim W_n(B) \qquad (n \to \infty)$$

für jede uniforme Menge B.

Wir schließen dieses Kapitel mit folgender Bemerkung:

BEMERKUNG 1.2.17. Im Allgemeinen sind die Folgen (b_n) und $(W_n(A))$ nicht regulär variierend. Jedoch für die Thaler-Intervallabbildungen I gilt nach [**Tha83**, Theorem 3] stets, dass für alle uniformen Mengen A, B

$$W_n(A) \sim W_n(B) \qquad (n \to \infty).$$

KAPITEL 2

Uniforme Rückkehrmengen

In diesem Kapitel wird der Begriff uniformer Rückkehrmengen eingeführt, welche eine wesentliche Rolle im Theorem 3.3.3 spielen werden.

2.1. Motivation: Thaler-Intervallabbildungen II

Für die im Beispiel 1.2.11 untersuchten Intervallabbildungen I wurden Aussagen über das asymptotische Verhalten der Folge $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \hat{P}^k\right)_{n\geq 1}$ gemacht. Nun werden wir uns im Folgenden mit der Frage des asymptotischen Verhaltens der Folge $\left(\hat{P}^n\right)_{n\geq 0}$ selbst beschäftigen. Dazu betrachten wir eine Klasse von Intervallabbildungen mit indifferentem Fixpunkt bei 0 und zwei wachsenden vollen Zweigen, die gewissen Voraussetzungen genügen. Ein konkretes Beispiel, das in die Klasse der Thaler-Intervallabbildungen II fällt, wird im Beispiel 3.3.4 vorgeführt.

BEISPIEL 2.1.1 (Thaler-Intervallabbildungen II [**Tha00**]). Sei $T : [0,1] \to [0,1]$ eine Abbildung mit indifferentem Fixpunkt bei 0 und zwei wachsenden vollen Zweigen. Wir setzen $I_0 := (0,c)$ und $I_1 := (c,1)$, wobei T monoton auf $I_j,\ j = 0,1$ ist. Ferner nehmen wir an, dass T zusätzlich den folgenden Voraussetzungen genügt:

(1) Für jedes $k \in \{0,1\}$ besitzt $T|_{I_k}$ eine C^1-Fortsetzungsfunktion $\overline{T}|_{I_k}$ auf dem Abschluss $\overline{I_k}$ von I_k, so dass $\left(\overline{T}|_{I_k}\right)' > 0$ und $\overline{T\left(I_k\right)} = [0,1]$.
(2) T ist in einer Umgebung von 0 konvex.
(3) T hat ein unendliches σ-endliches invariantes Maß μ äquivalent zu λ, so dass die Dichte $\frac{d\mu}{d\lambda}$ eine Version h der Gestalt
$$h\left(x\right) = \frac{g\left(x\right)}{x^p}, \qquad x \in (0,1]$$
besitzt, wobei $p \geq 1$ und g eine positive stetige Funktion von beschränkter Variation ist.
(4) Die Funktion
$$\psi := \frac{h \circ T \cdot T'}{h}$$
ist auf I_0 monoton wachsend.

Dann ist T eine konservative ergodische Transformation bezüglich μ (vgl. [**Tha00**]).

PROPOSITION 2.1.2 ([**Tha00**]). *Sei $T : [0,1] \to [0,1]$ eine Thaler-Intervallabbildung aus Beispiel 2.1.1 und $\alpha := \frac{1}{p}$. Dann gilt für alle Riemann-integrierbaren Funktion u*

$$W_n([c,1])\,\hat{P}^n(u) \;\longrightarrow\; \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(2-\alpha)}\int u\,d\lambda\right)h$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $(0,1]$.

2.2. Definition uniformer Rückkehrmengen

Diese Klasse von Intervallabbildungen motiviert den neuen Begriff uniformer Rückkehrmengen.

DEFINITION 2.2.1. Eine messbare Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < \infty$ heißt eine *uniforme Rückkehrmenge für* $f \in \mathcal{P}_\mu$, falls es eine monoton wachsende Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ positiver reeller Zahlen mit $b_n \uparrow \infty$ gibt, so dass

$$b_n\hat{T}^n(f) \;\longrightarrow\; 1 \quad \mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A.$$

Sie heißt eine *uniforme Rückkehrmenge,* falls sie eine uniforme Rückkehrmenge für ein gewisses $f \in \mathcal{P}_\mu$ ist.

Offensichtlich gilt für die Thaler-Intervallabbildungen II, dass jede messbare Menge $A \in \mathcal{B}_{[0,1]}$ mit $\lambda(A) > 0$, die von 0 weg beschränkt ist, eine uniforme Rückkehrmenge ist.

LEMMA 2.2.2. *Jede uniforme Rückkehrmenge A ist eine uniforme Menge.*

BEWEIS. Sei A eine uniforme Rückkehrmenge für $f \in \mathcal{P}_\mu$. Dann gibt es zu jedem fest vorgegebenen $\varepsilon \in (0,1)$ ein n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{b_n} \leq \hat{T}^n(f) \leq (1+\varepsilon)\frac{1}{b_n} \quad \mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A.$$

Setzt man $\widetilde{f} := \hat{T}^{n_0}(f) \in \mathcal{P}_\mu$ und beachtet $b_n \uparrow \infty$, so ist die Funktionenfolge $\left(\hat{T}^n\left(\widetilde{f}\right)\right)_{n\geq 0}$ μ-f. s. gleichmäßig beschränkt auf A. Da T konservativ und ergodisch ist, gilt ferner nach Proposition 1.1.6

$$\sum_{k=0}^{\infty}\hat{T}^k\left(\widetilde{f}\right) = \infty \qquad \mu\text{-f. s.}$$

Somit ergibt sich wegen

$$b_{n+n_0}\hat{T}^n\left(\widetilde{f}\right) \;\longrightarrow\; 1 \quad \mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A$$

und der gleichmäßigen Beschränktheit der Funktionenfolge $\left(\hat{T}^n\left(\widetilde{f}\right)\right)_{n\geq 0}$, dass

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{b_k}}\cdot\sum_{k=0}^{n}\hat{T}^k\left(\widetilde{f}\right)\longrightarrow 1\quad \mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A.$$

Dies bedeutet, dass A eine uniforme Menge für $\widetilde{f}$ ist, was zu zeigen war. □

Die folgende Proposition stellt –analog zu Proposition 1.2.15 für den Fall uniformer Mengen– den Zusammenhang zwischen der Normierungsfolge (b_n) aus Definition 2.2.1 und der Wander-Rate für uniforme Rückkehrmengen her; sie wird in Teilkapitel 3.3 zur Herleitung des Gleichverteilung-Grenzwertsatzes herangezogen.

PROPOSITION 2.2.3. *Für eine uniforme Rückkehrmenge A und für $\beta\in[0,1)$ gilt: Die Normierungsfolge (b_n) ist genau dann eine r. v. F. mit Exponent β, wenn (W_n) eine r. v. F. mit demselben Exponenten ist. In diesem Fall hat man*

$$b_n\sim W_n\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1+\beta)\qquad(n\to\infty)\,.$$

BEWEIS. Sei A eine uniforme Rückkehrmenge für $f\in\mathcal{P}_\mu$ mit Normierungsfolge (b_n). Für alle $s>0$ setzen wir:

$$\begin{aligned} Q(s) &:= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu(A\cap\{\varphi>n\})}{\mu(A)}e^{-ns},\\ U(s) &:= \sum_{n=0}^{\infty}\nu\left(T^{-n}A\right)e^{-ns}, \end{aligned}\tag{2.2.1}$$

wobei ν das Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Dichte f bezeichnet. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $\left(\hat{T}^n(f)\,|_A\right)$ eine gleichmäßig beschränkte Funktionenfolge ist. In der Tat gilt

$$A_n:=\bigcup_{k=0}^{n}T^{-k}A=\bigcup_{k=0}^{n}T^{-k}(A\cap\{\varphi>n-k\})\,,$$

wobei die Mengen $T^{-k}(A\cap\{\varphi>n-k\})\,,\ 0\leq k\leq n$, paarweise disjunkt sind. Daher erhält man

$$\nu(A_n)=\int_A\sum_{k=0}^{n}\hat{T}^k(f)\cdot\mathbf{1}_{A\cap\{\varphi>n-k\}}\,d\mu,\quad n\geq 0,$$

und folglich mit Hilfe der Produktregel für Laplace-Transformierte

$$\sum_{n=0}^{\infty}\nu(A_n)\,e^{-ns}=\int_A\left(\sum_{n=0}^{\infty}\hat{T}^n(f)\,e^{-ns}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{1}_{A\cap\{\varphi>n\}}e^{-ns}\right)\,d\mu.$$

Da

$$\hat{T}^n(f) \sim \frac{\nu(T^{-n}A)}{\mu(A)} \qquad (n \to \infty) \qquad \mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A,$$

folgt wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Funktionenfolge $\left(\hat{T}^n(f)|_A\right)$, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}^n(f)\, e^{-ns} \sim \frac{U(s)}{\mu(A)} \qquad (s \to 0) \qquad \mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A.$$

Daraus ergibt sich mit den Bezeichnungen aus (2.2.1), dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \nu(A_n)\, e^{-ns} \sim U(s)\, Q(s) \qquad (s \to 0).$$

Da $\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = 1$, gilt außerdem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \nu(A_n)\, e^{-ns} \sim \frac{1}{1-e^{-s}} \sim \frac{1}{s} \qquad (s \to 0).$$

Schließlich erhält man

$$\frac{1}{s} \sim U(s)\, Q(s) \qquad (s \to 0). \tag{2.2.2}$$

Ist $b_n \sim n^\beta L(n)$ für $\beta \in [0,1)$, wobei L eine langsam variierende Funktion (l. v. F.) für $x \to \infty$ ist, so gilt nach Karamatas Lemma (vgl. Anhang, Lemma 4.3.9)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \nu\left(T^{-k}A\right) \sim \frac{n^{1-\beta}}{(1-\beta)\, L(n)} \mu(A).$$

Somit erhält man aus der Asymptotik (2.2.2) nach dem Karamata-Tauberschen Satz (KT-Satz, vgl. Anhang, Theorem 4.3.8), dass

$$Q(s) \sim \frac{1}{\Gamma(1-\beta)\, \mu(A)} \left(\frac{1}{s}\right)^\beta L\left(\frac{1}{s}\right),$$

und weiter

$$W_n \sim \frac{1}{\Gamma(1-\beta)\, \Gamma(1+\beta)} b_n.$$

Nun sei $W_n \sim n^\beta \tilde{L}(n)$ für $\beta \in [0,1)$, wobei $\tilde{L}$ eine gewisse l. v. F. für $x \to \infty$ bezeichnet. Aus (2.2.2) folgt dann nach KT-Satz

$$\sum_{k=0}^{n-1} \nu\left(T^{-k}A\right) \sim \frac{n^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)\, \Gamma(1+\beta)\, \tilde{L}(n)} \mu(A).$$

Da

$$\sum_{k=0}^{n-1} \nu\left(T^{-k}A\right) \sim \mu(A) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{b_k},$$

(b_n) monoton und $1-\beta>0$ sind, erhält man weiter durch den KT-Satz

$$\frac{1}{b_n}\sim\frac{n^{-\beta}}{\Gamma\left(1-\beta\right)\Gamma\left(1+\beta\right)\tilde{L}\left(n\right)}.$$

Dies impliziert

$$b_n\sim\Gamma\left(1-\beta\right)\Gamma\left(1+\beta\right)W_n,$$

und hieraus folgt die Behauptung. $\square$

In der nächsten Proposition wird unter zusätzlichen Voraussetzungen die Umkehrung von Lemma 2.2.2 gezeigt.

PROPOSITION 2.2.4. *Sei A eine uniforme Menge für f. Falls die Wander-Rate (W_n) eine r. v. F. mit Exponent $(1-\alpha)$ für $\alpha\in(0,1]$ und die Folge $\left(\hat{T}^n\left(f\right)|_A\right)_{n\geq 0}$ schließlich monoton fallend ist (d.h.; es gibt ein $n_0\geq 0$, so dass $\left(\hat{T}^n\left(f\right)|_A\right)_{n\geq n_0}$ monoton fallend ist), dann ist A eine uniforme Rückkehrmenge. In diesem Fall gilt*

$$W_n\hat{T}^n\left(f\right)\longrightarrow\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(2-\alpha\right)}\qquad\mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A.$$

BEWEIS. $\lambda,\eta\in\mathbb{R}$ seien fest, aber beliebig mit $0<\lambda<\eta$. Setzen wir

$$V_n:=\sum_{k=0}^{n}\hat{T}^k\left(f\right),$$

so gilt dank der Monotonie der Funktionenfolge $\left(\hat{T}^n\left(f\right)|_A\right)_{n\geq n_0}$

$$\frac{\hat{T}^{\lfloor n\eta\rfloor}\left(f\right)}{V_n}\cdot\left(\lfloor n\eta\rfloor-\lfloor n\lambda\rfloor\right)\leq\frac{V_{\lfloor n\eta\rfloor}-V_{\lfloor n\lambda\rfloor}}{V_n}\leq\frac{\hat{T}^{\lfloor n\lambda\rfloor}\left(f\right)}{V_n}\cdot\left(\lfloor n\eta\rfloor-\lfloor n\lambda\rfloor\right)$$

für alle genügend großen n. Dabei ist $\lfloor x\rfloor:=\max\{n\in\mathbb{Z}\ :\ n\leq x\}$, $x\in\mathbb{R}$.

Ferner gibt es wegen $\lfloor n\eta\rfloor-\lfloor n\lambda\rfloor\sim n\left(\eta-\lambda\right)$ zu jedem festen $\varepsilon\in(0,1)$ ein $m_0\in\mathbb{N}$ mit

$$n\left(1-\varepsilon\right)\left(\eta-\lambda\right)\leq\lfloor n\eta\rfloor-\lfloor n\lambda\rfloor\leq n\left(1+\varepsilon\right)\left(\eta-\lambda\right)\qquad\text{für alle } n\geq m_0.$$

Damit folgt für alle genügend großen n, dass

$$\frac{n\hat{T}^{\lfloor n\eta\rfloor}\left(f\right)}{V_n}\cdot\left(1-\varepsilon\right)\left(\eta-\lambda\right)\leq\frac{V_{\lfloor n\eta\rfloor}-V_{\lfloor n\lambda\rfloor}}{V_n}\leq\frac{n\hat{T}^{\lfloor n\lambda\rfloor}\left(f\right)}{V_n}\cdot\left(1+\varepsilon\right)\left(\eta-\lambda\right).$$

Da

$$\frac{V_{\lfloor n\eta\rfloor}-V_{\lfloor n\lambda\rfloor}}{V_n}\longrightarrow\eta^\alpha-\lambda^\alpha\quad\text{für } n\to\infty\qquad\mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A,$$

erhält man einerseits

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\cdot\frac{\eta^\alpha-\lambda^\alpha}{\eta-\lambda}\leq\liminf\frac{n\hat{T}^{\lfloor n\lambda\rfloor}\left(f\right)}{V_n}\qquad\mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A.$$

Setzen wir $\eta \to \lambda$ und $\varepsilon \to 0$, dann folgt

$$\alpha\lambda^{\alpha-1} \leq \liminf \frac{n\hat{T}^{\lfloor n\lambda \rfloor}(f)}{V_n} \qquad \mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A.$$

Andererseits gilt analog

$$\limsup \frac{n\hat{T}^{\lfloor n\eta \rfloor}(f)}{V_n} \leq \alpha\eta^{\alpha-1} \qquad \mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A.$$

Da λ und η beliebig waren, ergibt sich für beliebiges $c > 0$

$$\frac{n\hat{T}^{\lfloor nc \rfloor}(f)}{V_n} \longrightarrow \alpha c^{\alpha-1} \qquad \mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A.$$

Schließlich erhält man wegen

$$V_{\lfloor nc \rfloor} \sim c^\alpha V_n \quad \mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A \quad \text{und} \quad \lfloor nc \rfloor \sim cn \quad (n \to \infty)$$

für $m = \lfloor nc \rfloor$

$$\frac{m\hat{T}^m(f)}{V_m} = \frac{\lfloor nc \rfloor}{n} \cdot \frac{n\hat{T}^{\lfloor nc \rfloor}(f)}{V_n} \cdot \frac{V_n}{V_{\lfloor nc \rfloor}} \longrightarrow \alpha \quad \mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A.$$

Hieraus ergibt sich nach (1.2.2) unmittelbar die Behauptung. $\square$

KAPITEL 3

Rückkehrzeitprozesse

In diesem Kapitel werden wir uns mit *Rückkehrzeitprozessen* befassen, die durch konservative ergodische μ-invariante Transformationen hinsichtlich Mengen definiert sind, die gewisse Eigenschaften erfüllen (uniforme Mengen bzw. uniforme Rückkehrmengen). Insbesondere betrachten wir den normalisierten Kac-Prozess Φ_n sowie den normalisierten Verbrachte-Zeit-Kac-Prozess Ψ_n. Dabei werden Grenzwertsätze entwikkelt, die das asymptotische Verhalten dieser Prozesse für den Fall beschreiben, dass die Wander-Rate eine r. v. F. mit Exponent $(1-\alpha) \in [0,1]$ ist.

3.1. Arcus-Sinus-Gesetz für Kac-Prozesse

Für eine messbare Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < \infty$ betrachten wir im weiteren Verlauf der Arbeit den *Erneuerungsprozess* $(Z_n)_{n\geq 0}$, definiert durch $Z_0 \equiv 0$,

$$Z_n(x) := \begin{cases} \max\{k \leq n : \ T^k(x) \in A\}, & x \in A_n := \bigcup_{k=0}^{n} T^{-k}A, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad n \geq 1.$$

Für diesen Prozess gilt das Arcus-Sinus-Gesetz von DYNKIN und LAMBERTI.

THEOREM 3.1.1 (Thalers Dynkin-Lamberti-Satz [**Tha98**]). *Sei A eine uniforme Menge. Falls die Wander-Rate (W_n) eine r.v. F. mit Exponent $(1-\alpha)$ für $\alpha \in [0,1]$ ist, dann gilt*

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)} \xi_\alpha,$$

wobei ξ_α für $\alpha \in (0,1)$ die Zufallsvariable mit Werten in $[0,1]$ und Dichte

$$f_{\xi_\alpha}(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{1}{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}, \qquad 0 < x < 1$$

bezeichnet, und $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 1$.

Die Verteilung von ξ_α wird die generalisierte Arcus-Sinus-Verteilung *genannt.*

Für eine r. v. F. F für $x \to \infty$ nennen wir die Prozesse

$$\frac{F(Z_n)}{F(n)} \quad \text{und} \quad \frac{F(n-Z_n)}{F(n)}$$

(durch F) *verzerrte Rückkehrzeitprozesse*. Insbesondere definieren wir:

DEFINITION 3.1.2. Unter dem *normalisierten Kac-Prozess* bzw. dem *normalisierten Verbrachte-Zeit-Kac-Prozess* versteht man den Prozess

$$\Phi_n := \frac{\sum_{k=0}^{Z_n} \mu\left(A \cap \{\varphi > k\}\right)}{\mu\left(A_n\right)}$$

bzw. den Prozess

$$\Psi_n := \frac{\sum_{k=0}^{n-Z_n} \mu\left(A \cap \{\varphi > k\}\right)}{\mu\left(A_n\right)}.$$

Das folgende wahrscheinlichkeitstheoretische Resultat wird dazu genutzt, konkrete Konvergenzaussagen für den Prozess Φ_n sowie Ψ_n unter bestimmten Voraussetzungen zu treffen.

PROPOSITION 3.1.3. *Gegeben seien* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $Y_n : \Omega \to [0, \infty]$, $(n \geq 1)$ *eine Folge von messbaren Funktionen und* Y *eine Zufallsvariable mit Werten in* $[0, \infty]$ *und* $P(Y = 0) = 0 = P(Y = \infty)$*. Dann gilt für jede r. v. F.* F *für* $x \to \infty$ *mit Exponent* $\beta \in \mathbb{R}$ *folgende Implikation:*

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{F(Y_n)}{F(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} Y^\beta.$$

BEWEIS. Es ist bekannt, dass es für jede r. v. F. F mit Exponent $\beta \in \mathbb{R}$ eine l. v. F. L gibt mit $F(x) = x^\beta L(x)$ für alle $x > 0$ (vgl. Anhang). Um die Behauptung zu beweisen, genügt es daher zu zeigen, dass

$$\frac{L(Y_n)}{L(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

In der Tat gilt für alle $\delta > 0$ und $K > 0$ mit $\delta < K$

$$\liminf \mathbb{P}\left(\delta \leq \frac{Y_n}{n} \leq K\right) \geq 1 - C_{\delta,K}.$$

Gemäß des Satzes von gleichmäßiger Konvergenz für l. v. Fen. (vgl. Anhang, Proposition 4.3.3) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit

$$n \geq n_0 \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{L(\lambda n)}{L(n)} - 1\right| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad \lambda \in [\delta, K].$$

Somit gilt für alle genügend großen n

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{L(Y_n)}{L(n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq 1 - \mathbb{P}\left(\delta \leq \frac{Y_n}{n} \leq K\right),$$

woraus

$$\limsup \mathbb{P}\left(\left|\frac{L(Y_n)}{L(n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq C_{\delta,K}$$

folgt. Da $C_{\delta,K} \longrightarrow 0$ für $\delta \to 0$ und $K \to \infty$, ergibt sich die Behauptung. □

Diese Proposition lässt sich nun auf Thalers Arcus-Sinus-Satz anwenden.

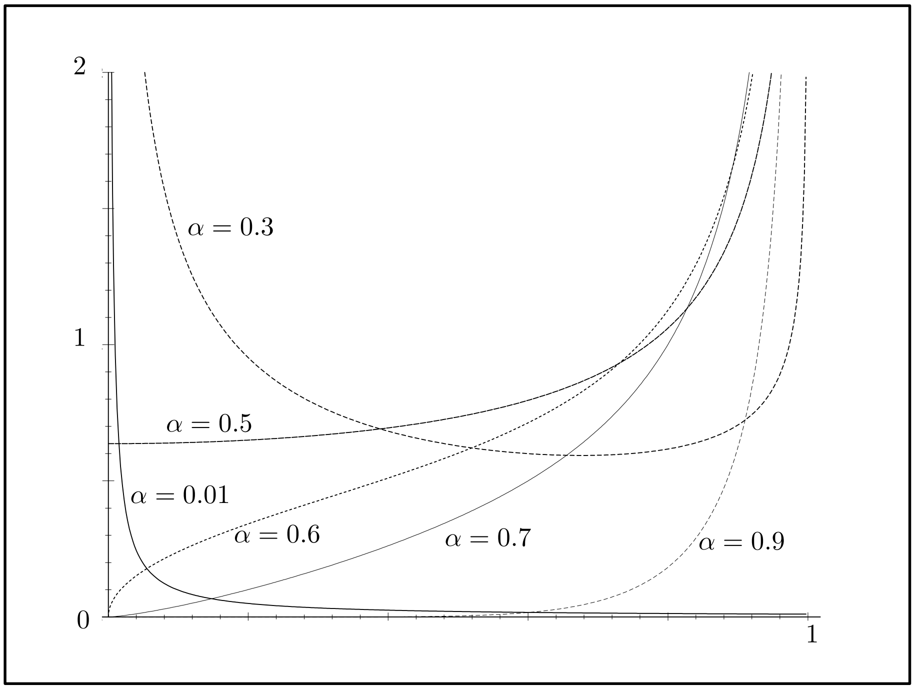

ABBILDUNG 3.1.1. Die Grenzverteilungsdichte f_{X_α} des normalisierten Kac-Prozesses für verschiedene Werte von $\alpha \in (0,1)$. Für $\alpha = 0$ bzw. 1 ist die extreme Verteilung das Dirac-Maß δ_0 bzw. δ_1 (für $\alpha = 0$ vgl. Korollar 3.2.5).

THEOREM 3.1.4 (Arcus-Sinus-Gesetz). *Gegeben sei eine uniforme Menge A, so dass die Wander-Rate (W_n) eine r. v. F. mit Exponent $(1-\alpha)$ für $\alpha \in [0,1]$ ist. Dann folgt:*

(1) *Falls $0 < \alpha \leq 1$, gilt für den normalisierten Kac-Prozess*

$$\Phi_n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)} X_\alpha,$$

wobei X_α für $\alpha \in (0,1)$ die Zufallsvariable mit Werten in $[0,1]$ und Dichte

$$f_{X_\alpha}(x) = \frac{1}{1-\alpha}\frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\frac{1}{x^{\frac{1-2\alpha}{1-\alpha}}\left(1 - x^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha}}, \quad 0 < x < 1$$

bezeichnet, und $X_1 = 1$ (siehe Abbildung 3.1.1).

(2) *Falls $0 \leq \alpha < 1$, erhält man für den normalisierten Verbrachte-Zeit-Kac-Prozess*

$$\Psi_n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)} Y_\alpha,$$

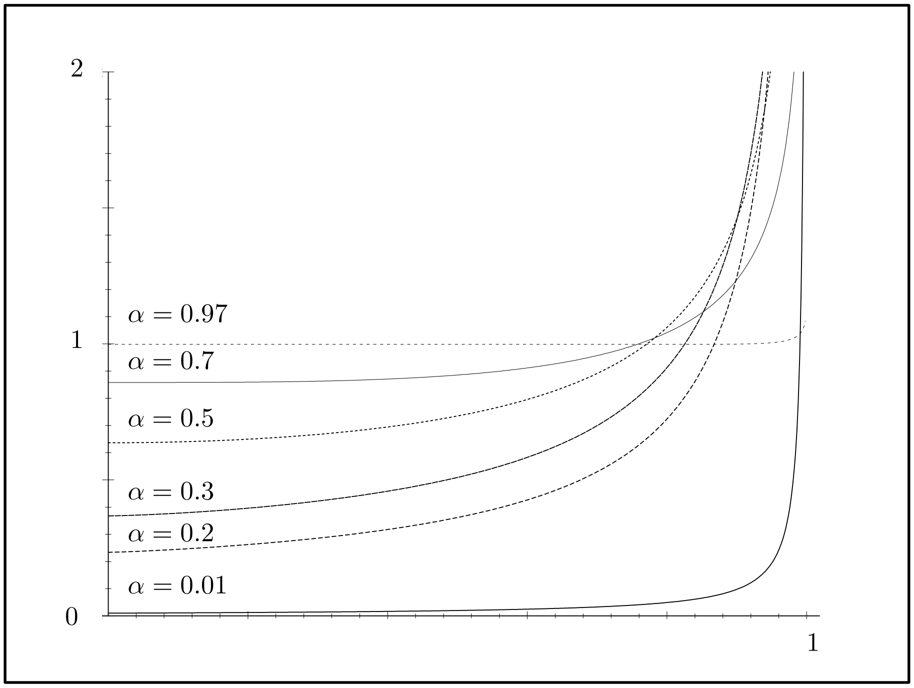

ABBILDUNG 3.1.2. Die Grenzverteilungsdichte f_{Y_α} des normalisierten Verbrachte-Zeit-Kac-Prozesses für verschiedene Werte von $\alpha \in (0,1)$. Für $\alpha = 0$ bzw. 1 ist die extreme Verteilung das Dirac-Maß δ_1 bzw. die Gleichverteilung auf $[0,1]$ (für $\alpha = 1$ vgl. Theorem 3.3.3).

wobei Y_α für $\alpha \in (0,1)$ die Zufallsvariable mit Werten in $[0,1]$ und Dichte

$$f_{Y_\alpha}(x) = \frac{1}{1-\alpha}\frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\frac{1}{\left(1 - x^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}}, \quad 0 < x < 1$$

bezeichnet, und $Y_0 = 1$ (siehe Abbildung 3.1.2).

BEWEIS. Mit $F(x) := W_{\lfloor x \rfloor}$ folgen die Behauptungen direkt aus der Proposition 3.1.3. □

BEMERKUNG 3.1.5. Wir bemerken, dass für $\alpha \in (0,1)$ folgende Identitäten in Verteilung gelten

$$X_\alpha \stackrel{\mathrm{d}}{=} (\xi_\alpha)^{1-\alpha} \qquad \text{und} \qquad Y_\alpha \stackrel{\mathrm{d}}{=} (1-\xi_\alpha)^{1-\alpha}.$$

Insbesondere besitzen die Zufallsvariablen $X_{\frac{1}{2}}$ und $Y_{\frac{1}{2}}$ die Arcus-Sinus-Verteilung mit Dichte

$$f_{Y_{\frac{1}{2}}}(x) = f_{X_{\frac{1}{2}}}(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad 0 < x < 1.$$

3.2. Verzerrte Rückkehrzeitprozesse

In diesem Abschnitt untersuchen wir die verzerrten Rückkehrzeitprozesse $\frac{F(Z_n)}{F(n)}$, die durch r. v. Fen. F mit Exponenten $\beta > 0$ gegeben sind, im Falle, dass die Wander-Rate eine r. v. F. mit Exponent 1 ist. Man hat zu beachten, dass die Proposition 3.1.3 in diesem Fall keine Aussage über das asymptotische Verhalten solcher Prozesse liefern kann. Ferner wird ein *Gleichverteilungsgesetz* für den Erneuerungsprozess Z_n bewiesen.

Zunächst werden einige Vorbereitungen getroffen. Wir beginnen mit einer gleichmäßigen Version des Karamata-Lemmas (vgl. Anhang, Lemma 4.3.9).

LEMMA 3.2.1. *Gegeben sei $(f)_{n\geq 1}$ eine monoton wachsende Folge nichtnegativer reellwertiger Funktionen auf einem beliebigen Raum Y, so dass für eine gewisse l. v. F. (l_n) und $\rho \geq 0$ gilt*

$$f_n \sim n^\rho l_n \quad (n \to \infty) \quad \textit{gleichmäßig auf} \quad Y.$$

Dann folgt für alle $p \geq -\rho - 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{p+1} f_n}{\sum_{k=1}^n k^p f_k} = p + \rho + 1 \qquad \textit{gleichmäßig auf} \quad Y.$$

BEWEIS. Zunächst sei $p + \rho + 1 > 0$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 mit

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; (1-\varepsilon)\, n^\rho l_n \leq f_n(y) \leq (1+\varepsilon)\, n^\rho l_n \qquad \text{für alle } y \in Y.$$

Da die Folge (f_n) monoton wachsend ist, gilt

$$\frac{n^{p+1} f_n}{\sum_{k=n_0}^n k^p f_k} \sim \frac{n^{p+1} f_n}{\sum_{k=1}^n k^p f_k} \qquad \text{gleichmäßig auf } Y.$$

Für beliebiges aber festes $\lambda \in (0, p + \rho + 1)$ und für alle $y \in Y$ erhält man dann mit Hilfe des Lemmas 4.3.7 (vgl. Anhang)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n_0}^n k^p f_k(y) &\leq (1+\varepsilon) \sum_{k=n_0}^n k^{p+\rho-\lambda} k^\lambda l_k \\
&\leq (1+\varepsilon) \sup_{n_0 \leq k \leq n} \left(k^\lambda l_k\right) \sum_{k=n_0}^n k^{p+\rho-\lambda} \\
&\sim (1+\varepsilon) \frac{1}{p+\rho+1-\lambda} n^{p+\rho+1} l_n.
\end{aligned}$$

Daher ergibt sich für alle hinreichend großen n

$$\sum_{k=n_0}^{n} k^p f_k(y) \leq (1+\varepsilon)^2 \frac{1}{p+\rho+1-\lambda} n^{p+\rho+1} l_n.$$

In analoger Weise erhält man auch für alle $y \in Y$ und alle hinreichend großen n

$$\sum_{k=n_0}^{n} k^p f_k(y) \geq (1-\varepsilon)^2 \frac{1}{p+\rho+1+\lambda} n^{p+\rho+1} l_n. \tag{3.2.1}$$

Da $\lambda > 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig waren, folgt schließlich

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in Y} \left| \frac{\sum_{k=n_0}^{n} k^p f_k(y)}{n^{p+\rho+1} l_n} - \frac{1}{p+\rho+1} \right| = 0.$$

Also gilt die Behauptung für $p+\rho+1 > 0$.

Für $p+\rho+1 = 0$ und $\lambda > 0$ beliebig, aber fest gilt gemäß der Ungleichung (3.2.1)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in Y} \left| \frac{\sum_{k=n_0}^{n} k^p f_k(y)}{n^{p+\rho+1} l_n} \right| \geq \frac{(1-\varepsilon)^2}{\lambda},$$

woraus die Behauptung für $\lambda \to 0$ folgt. □

Dieses Lemma wird nun dazu verwendet, die folgende Proposition, welche auch von eigenem Interesse für die Theorie der regulären Variation ist, zu beweisen.

PROPOSITION 3.2.2. *Es seien $(a_n)_{n\geq 1}$ eine r. v. F. mit Exponent $\alpha \in \mathbb{R}$, $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge nichtnegativer reellwertiger Funktionen auf einem beliebigen Raum Y und $F_n := \sum_{m=1}^{n} f_m$, $F_0 := 0$. Ferner nehmen wir an, dass für $\rho \geq 0$ mit $\alpha + \rho > 0$ gilt*

$$F_n \sim n^\rho l_n \qquad (n \to \infty) \quad \textit{gleichmäßig auf} \quad Y,$$

wobei l_n eine l. v. F. ist. Dann folgt

$$\frac{\sum_{m\leq n} a_m f_m}{a_n F_n} \longrightarrow \frac{\rho}{\alpha+\rho} \quad \textit{gleichmäßig auf} \quad Y.$$

BEWEIS. Zunächst sei $a_n := n^\alpha$ mit $\alpha > -\rho$. Durch partielle Summation gilt

$$\sum_{m\leq n} m^\alpha f_m(y) = (n+1)^\alpha F_n(y) - \sum_{m\leq n} F_m(y)\,\Delta(m^\alpha) \quad \text{für alle } y \in Y,$$

wobei $\Delta(m^\alpha) := (m+1)^\alpha - m^\alpha$. Das bedeutet

$$\frac{\sum_{m\leq n} m^\alpha f_m(y)}{(n+1)^\alpha F_n(y)} = 1 - \frac{\sum_{m\leq n} F_m(y)\,\Delta(m^\alpha)}{(n+1)^\alpha F_n(y)}.$$

Da $\Delta(m^\alpha) \sim \alpha m^{\alpha-1} \quad (m \to \infty)$, ergibt sich nach Lemma 3.2.1, dass

$$\frac{\sum_{m\leq n} F_m \Delta(m^\alpha)}{(n+1)^\alpha F_n} \longrightarrow \frac{\alpha}{\alpha+\rho} \quad \text{gleichmäßig auf } Y.$$

Dies impliziert, dass

$$\frac{\sum_{m\leq n} m^{\alpha} f_m}{(n)^{\alpha} F_n} \longrightarrow \frac{\rho}{\alpha+\rho} \qquad (n\to\infty) \quad \text{gleichmäßig auf } Y. \tag{3.2.2}$$

Für $a_n := n^{\alpha} l_n$, $\alpha > -\rho$, wobei (l_n) eine l. v. F. ist und $\lambda \in (0, \alpha+\rho)$ beliebig, aber fest erhält man mit Hilfe des Lemmas 4.3.7 und (3.2.2) einerseits gleichmäßig auf Y

$$\begin{aligned}
\sum_{m\leq n} m^{\alpha} l_m f_m &= \sum_{m\leq n} m^{\lambda} m^{\alpha-\lambda} l_m f_m \\
&\leq \sup_{m\leq n} \left(m^{\lambda} l_m\right) \sum_{m\leq n} m^{\alpha-\lambda} f_m \\
&\sim n^{\alpha} l_n F_n \frac{\rho}{\alpha+\rho-\lambda},
\end{aligned}$$

woraus für festes $\varepsilon > 0$ und hinreichend große n gleichmäßig auf Y folgt

$$\frac{\sum_{m\leq n} m^{\alpha} l_m f_m}{n^{\alpha} l_n F_n} - \frac{\rho}{\alpha+\rho-\lambda} \leq \frac{\varepsilon\rho}{\alpha+\rho-\lambda}.$$

Andererseits gilt analog gleichmäßig auf Y

$$\begin{aligned}
\sum_{m\leq n} m^{\alpha} l_m f_m &\geq \inf_{m\leq n} \left(m^{-\varepsilon} l_m\right) \sum_{m\leq n} m^{\alpha+\varepsilon} f_m \\
&\sim n^{\alpha} l_n F_n \frac{\rho}{\alpha+\rho+\varepsilon},
\end{aligned}$$

woraus für festes $\varepsilon > 0$ und hinreichend große n gleichmäßig auf Y folgt

$$\frac{\sum_{m\leq n} m^{\alpha} l_m f_m}{n^{\alpha} l_n F_n} - \frac{\rho}{\alpha+\rho+\lambda} \geq \frac{-\varepsilon\rho}{\alpha+\rho+\lambda}.$$

Lässt man λ gegen 0 gehen, so folgt die Behauptung unmittelbar aus den beiden obigen Beobachtungen. □

Um den Kompaktheitssatz von AARONSON auf die hier untersuchten Prozesse anwenden zu können, benötigen wir folgendes Lemma:

LEMMA 3.2.3. *Gegeben seien eine messbare Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(A) < \infty$ und eine r. v. F. F mit Exponent $\beta \geq 0$ und $F(t) \to \infty$. Dann gilt*

$$\frac{1}{F(n)} \left(F(Z_n \circ T) - F(Z_n)\right) \xrightarrow[\text{lok. stoch.}]{\mu} 0. \tag{3.2.3}$$

BEWEIS. Sei φ die in (1.2.1) definierte Treffer- oder Rückkehrzeit. Gemäß des Darstellungssatzes für l. v. Fen. (vgl. Anhang, Prop. 4.3.4) sowie Bemerkung 4.3.2 gibt es ein gewisses $B > 0$, so dass

$$F(x) = x^{\beta} \psi(x) \exp\left(\int_B^x \frac{\zeta(t)}{t}\, dt\right) \quad \text{für alle } x \geq B, \tag{3.2.4}$$

wobei ψ eine positive messbare beschränkte Funktion auf $[B,\infty)$ und ζ eine stetige Funktion auf $[B,\infty)$ ist mit

$$\psi(x) \longrightarrow C \in (0,\infty) \quad \text{und} \quad \zeta(x) \longrightarrow 0 \qquad (x \to \infty).$$

Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass ein $\delta \in (0,1)$ existiert mit

$$|\zeta(t)| < \delta \quad \text{für alle } t \geq B.$$

Aus (3.2.4) gilt dann

$$F(x) \sim C x^{\beta} \exp\left(\int_B^x \frac{\zeta(t)}{t}\, dt\right) \qquad (x \to \infty).$$

Wir definieren $\widetilde{F}(x) := C x^{\beta} \exp\left(\int_B^x \frac{\zeta(t)}{t}\, dt\right)$ für $x \geq B$ und zeigen zunächst, dass die Behauptung des Lemmas für $\widetilde{F}$ gilt. Für $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$K_{\varepsilon,n} := \left\{\varphi \leq n \ \wedge \ \frac{1}{\widetilde{F}(n)} \left|\widetilde{F}(Z_n \circ T) - \widetilde{F}(Z_n)\right| \geq \varepsilon\right\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Wegen

$$Z_n(T(x)) = \begin{cases} Z_n(x) - 1, & x \in \{\varphi \leq n\} \cap T^{-(n+1)} A^c, \\ n, & x \in T^{-(n+1)} A, \end{cases} \tag{3.2.5}$$

folgt

$$\begin{aligned} K_{\varepsilon,n} \quad \subset \quad & \left(\{\varphi \leq n\} \cap T^{-(n+1)} A^c \cap \left\{\frac{1}{\widetilde{F}(n)} \left(\widetilde{F}(Z_n) - \widetilde{F}(Z_n - 1)\right) \geq \varepsilon\right\}\right) \\ & \cup \left(T^{-(n+1)} A \cap \left\{\frac{1}{\widetilde{F}(n)} \left(\widetilde{F}(n) - \widetilde{F}(Z_n)\right) \geq \varepsilon\right\}\right). \end{aligned}$$

Da $\widetilde{F}$ eine monoton wachsende r. v. F. ist und $Z_n \to \infty$ μ-f. s., gilt dann

$$\frac{1}{\widetilde{F}(n)} \left(\widetilde{F}(Z_n) - \widetilde{F}(Z_n - 1)\right) \leq \frac{1}{\widetilde{F}(Z_n)} \left(\widetilde{F}(Z_n) - \widetilde{F}(Z_n - 1)\right) \longrightarrow 0 \ \mu\text{-f. s.}$$

Daraus folgt für alle $\nu \in \mathcal{P}_{\mu}$

$$\lim_{n\to\infty} \nu\left(\{\varphi \leq n\} \cap T^{-(n+1)} A^c \cap \left\{\frac{1}{\widetilde{F}(n)} \left(\widetilde{F}(Z_n) - \widetilde{F}(Z_n - 1)\right) \geq \varepsilon\right\}\right) = 0. \tag{3.2.6}$$

Für $n \geq B$ hinreichend groß sei $\mathcal{A}_n := \{\omega : Z_n(\omega) \geq B\}$. Dann gilt für alle $\omega \in \mathcal{A}_n$

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(n) - \widetilde{F}(Z_n(\omega)) = C \exp\left(\int_B^{Z_n(\omega)} \frac{\zeta(t)}{t}\, dt\right) \times & \\ \left[n^{\beta} \exp\left(\int_{Z_n(\omega)}^n \frac{\zeta(t)}{t}\, dt\right) - (Z_n(\omega))^{\beta}\right]. & \end{aligned}$$

Da $|\zeta(t)| < \delta$ auf $[B,\infty)$ ist, gibt es ferner eine Konstante C_δ, so dass gilt

$$\widetilde{F}(n) - \widetilde{F}(Z_n(\omega)) \leq C_\delta \left(n^{\beta+\delta} - (Z_n(\omega))^{\beta+\delta}\right) =: E.$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle**:**

1. Fall: Für $\beta + \delta \geq 1$ erhält man durch den Mittelwertsatz

$$E \leq C_\delta (\beta+\delta)\, n^{\beta+\delta-1} (n - Z_n(\omega)).$$

2. Fall: Für $\beta + \delta < 1$ gilt $E \leq C_\delta (n - Z_n(\omega))$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} T^{-(n+1)}A \cap \left\{ \frac{\widetilde{F}(n) - \widetilde{F}(Z_n)}{\widetilde{F}(n)} \geq \varepsilon \right\} &\cap \quad \mathcal{A}_n \\ &\subset \quad T^{-(n+1)}A \cap \{n - Z_n \geq c_n\varepsilon\} \\ &= \quad \bigcup_{c_n\varepsilon \leq k \leq n-1} \{Z_n = n-k\} \cap T^{-(n+1)}A \\ &= \quad \bigcup_{c_n\varepsilon+1 \leq k \leq n} T^{-(n-k+1)}(A \cap \{\varphi = k\}), \end{aligned}$$

wobei wir im ersten Fall $c_n := \frac{\widetilde{F}(n)}{n^{\beta+\delta-1} C_\delta (\beta+\delta)}$ setzen und im zweiten Fall $c_n := C_\delta \widetilde{F}(n)$. Wegen der Wahl von δ gilt in beiden Fällen $c_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Somit ergibt sich unter Berücksichtigung der T-Invarianz von μ

$$\begin{aligned} \mu\Bigg(T^{-(n+1)}A \cap \left\{ \frac{1}{\widetilde{F}(n)} \left(\widetilde{F}(n) - \widetilde{F}(Z_n)\right) \geq \varepsilon \right\} &\cap \quad \mathcal{A}_n\Bigg) \\ &\leq \quad \sum_{k=\lfloor c_n\varepsilon+1 \rfloor}^{n} \mu(A \cap \{\varphi = k\}) \\ &\leq \quad \mu(A \cap \{\varphi \geq \lfloor c_n\varepsilon + 1 \rfloor\}) \\ &\quad \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Daraus folgt für alle $\nu \in \mathcal{P}_\mu$

$$\lim_{n\to\infty} \nu \left(T^{-(n+1)}A \cap \left\{ \frac{1}{\widetilde{F}(n)} \left(\widetilde{F}(n) - \widetilde{F}(Z_n)\right) \geq \varepsilon \right\} \cap \mathcal{A}_n \right) = 0$$

und schließlich wegen $\lim_{n\to\infty} \nu(\mathcal{A}_n^c) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \nu \left(T^{-(n+1)}A \cap \left\{ \frac{1}{\widetilde{F}(n)} \left(\widetilde{F}(n) - \widetilde{F}(Z_n)\right) \geq \varepsilon \right\}\right) = 0.$$

Daher und aus (3.2.6) ergibt sich für alle $\nu \in \mathcal{P}_\mu$ wegen $\lim_{n\to\infty} \nu(\{\varphi > n\}) = 0$, dass

$$\lim_{n\to\infty} \nu\left(\left\{\frac{\left|\widetilde{F}(Z_n \circ T) - \widetilde{F}(Z_n)\right|}{\widetilde{F}(n)} \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \nu(K_{\varepsilon,n}) + \lim_{n\to\infty} \nu(\{\varphi > n\}) = 0.$$

Dies liefert nach Bemerkung 1.1.9 die Behauptung (3.2.3) für $\widetilde{F}$.

Nun folgern wir die Behauptung (3.2.3) für F, indem man für

$$Y_n := F(Z_n \circ T) - F(Z_n) \quad \text{und} \quad \widetilde{Y}_n := \widetilde{F}(Z_n \circ T) - \widetilde{F}(Z_n)$$

zeigt, dass

$$\frac{Y_n}{\widetilde{F}(n)} - \frac{\widetilde{Y}_n}{\widetilde{F}(n)} \xrightarrow[\text{lok. stoch.}]{\mu} 0.$$

In der Tat gilt wegen $F(x) \sim \widetilde{F}(x)$ für $x \to \infty$ und $Z_n \to \infty$ μ-f. s., dass es f. s. zu jedem $\omega \in X$ und vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 := n_0(\omega, \varepsilon)$ gibt mit

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \widetilde{F}(Z_n(\omega)) \leq F(Z_n(\omega)) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \widetilde{F}(Z_n(\omega)) \quad \forall\, n \geq n_0$$

und

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \widetilde{F}(Z_n \circ T(\omega)) \leq F(Z_n \circ T(\omega)) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \widetilde{F}(Z_n \circ T(\omega)) \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Daraus folgt für alle $n \geq n_0$

$$\left|\widetilde{Y}_n(\omega) - Y_n(\omega)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(\widetilde{F}(Z_n \circ T(\omega)) + \widetilde{F}(Z_n(\omega))\right)$$

und schließlich auf Grund der Monotonie von $\widetilde{F}$

$$\left|\frac{\widetilde{Y}_n(\omega)}{\widetilde{F}(n)} - \frac{Y_n(\omega)}{\widetilde{F}(n)}\right| \leq \varepsilon.$$

Dies bedeutet, das der Prozess $\left(\frac{\widetilde{Y}_n(\omega)}{\widetilde{F}(n)} - \frac{Y_n(\omega)}{\widetilde{F}(n)}\right)$ μ-f. s. gegen 0 konvergiert und folglich auch lokal stochastisch bzgl. μ.
Damit folgt wegen $F(n) \sim \widetilde{F}(n)$ die Behauptung (3.2.3) für F. □

Jetzt wird der erste Hauptsatz dieses Abschnitts bewiesen, wozu die *Methode der Momente* (vgl. [**Bil79**, Seite 344]) verwendet wird.

THEOREM 3.2.4 (Grenzwertsatz für verzerrte Rückkehrzeitprozesse). *Es sei A eine uniforme Menge. Ist die Wander-Rate (W_n) eine r. v. F. mit Exponent 1, so gilt für jede r. v. F. F mit Exponent $\beta > 0$:*

$$\frac{F(Z_n)}{F(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)} 0 \qquad (n \to \infty).$$

BEWEIS. Sei A eine uniforme Menge für ein gewisses $f \in \mathcal{P}_\mu$ mit Normierungsfolge (b_n). Da $Z_n \to \infty$ μ-f. s. und es für jede r. v. F. F mit Exponent $\beta > 0$ eine monoton wachsende r. v. F. F_1 gibt mit $F(x) \sim F_1(x)$ für $x \to \infty$, nehmen wir ohne Einschränkung an, dass F monoton wachsend ist und keine Singularität in 0 besitzt. Für alle $s > 0$ und $r \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$H_r(s) \quad := \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{A_n} (F(Z_n))^r \; d\nu \right) e^{-ns},$$

wobei ν das Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Dichte $f \in \mathcal{P}_\mu$ bezeichnet. In der Tat gilt für alle $r, n \geq 0$ folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} \int_{A_n} (F(Z_n))^r \; d\nu &= \sum_{k=0}^{n} (F(k))^r \, \nu(A_n \cap \{Z_n = k\}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (F(k))^r \, \nu\left(T^{-k}(A \cap \{\varphi > n-k\})\right) \\ &= \int_A \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{A \cap \{\varphi > n-k\}} (F(k))^r \, \hat{T}^k(f) \; d\mu. \end{aligned}$$

Somit:

$$H_r(s) = \int_A \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{A \cap \{\varphi > n\}} e^{-ns} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (F(n))^r \, \hat{T}^n(f) \, e^{-ns} \right) \; d\mu.$$

Da (b_n) eine l. v. F. und F eine r. v. F. mit Exponent $\beta > 0$ ist, folgt nach der Proposition 3.2.2, dass für alle $r \geq 0$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} (F(k))^r \, \hat{T}^k(f)}{b_n (F(n))^r} \longrightarrow 0 \quad \mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A.$$

Daraus folgt μ-f. s. gleichmäßig auf A:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (F(k))^r \, \hat{T}^k(f) \right) e^{-ns} = o\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n (F(n))^r \, e^{-ns} \right) \qquad (s \to 0).$$

Nun seien $W_n \sim nL(n)$ und $F(n) \sim n^\beta \tilde{L}(n)$, wobei $\tilde{L}$ und L gewisse l. v. Fen. sind. Nach dem KT-Satz gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A \cap \{\varphi > n\}) \, e^{-ns} \sim \left(\frac{1}{s}\right) L\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (s \to 0). \tag{3.2.7}$$

Ferner wegen

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(F(n))^r\,\hat{T}^n(f)\,e^{-ns}}{\sum_{n=0}^{\infty}b_n\,(F(n))^r\,e^{-ns}} &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(F(k))^r\,\hat{T}^k(f)\right)e^{-ns}}{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}b_k\,(F(k))^r\right)e^{-ns}} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(F(k))^r\,\hat{T}^k(f)\right)e^{-ns}}{\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,(F(n))^r\,e^{-ns}}\times \\ &\qquad \frac{\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,(F(n))^r\,e^{-ns}}{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}b_k\,(F(k))^r\right)e^{-ns}}\end{aligned}$$

erhält man nach dem KT-Satz μ-f. s. gleichmäßig auf A

$$\sum_{n=0}^{\infty}(F(n))^r\,\hat{T}^n(f)\,e^{-ns}=o\left(\Gamma(\beta r+1)\left(\frac{1}{s}\right)^{\beta r}\frac{\tilde{L}^r\left(\frac{1}{s}\right)}{L\left(\frac{1}{s}\right)}\right)\quad(s\to 0)\,. \tag{3.2.8}$$

Daher und aus (3.2.7) folgt:

$$H_r(s)=o\left(\Gamma(\beta r+1)\left(\frac{1}{s}\right)^{\beta r+1}\tilde{L}^r\left(\frac{1}{s}\right)\right)\qquad(s\to 0)\,.$$

Da die Folge $\left(\int_{A_n}(F(Z_n))^r\ d\nu\right)$ monoton wachsend ist, ergibt sich dann nach Lemma 4.3.10 (vgl. Anhang), dass

$$\begin{aligned}\frac{\int_{A_n}(F(Z_n))^r\ d\nu}{n^{\beta r}\tilde{L}^r(n)} &= \frac{\int_{A_n}(F(Z_n))^r\ d\nu}{\frac{1}{n}H_r\left(\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{\frac{1}{n}H_r\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\beta r}\tilde{L}^r(n)} \\ &= o(1)\,.\end{aligned}$$

Beachtet man, dass $\lim_{n\to\infty}\nu(X\setminus A_n)=0$ ist, so erhält man schließlich

$$\int_X\left(\frac{F(Z_n)}{F(n)}\right)^r\ d\nu=o(1)\,,$$

und folglich auf Grund der Methode der Momente

$$\frac{F(Z_n)}{F(n)}\ \stackrel{\nu}{\longrightarrow}\ 0\qquad(n\to\infty)\,.$$

Abschließend folgt die Behauptung direkt aus Lemma 3.2.3 nach dem Kompaktheitssatz 1.1.10. □

KOROLLAR 3.2.5. *Unter den Voraussetzungen des Theorems 3.2.4 gilt für den normalisierten Kac-Prozess* Φ_n

$$\Phi_n\ \stackrel{\mathcal{L}(\mu)}{\longrightarrow}\ 0\qquad(n\to\infty)\,.$$

Im Folgenden wird das Gleichverteilungsgesetz für den Erneuerungsprozess Z_n formuliert.

THEOREM 3.2.6 (Gleichverteilungsgesetz für den Erneuerungsprozess). *Für eine uniforme Menge A sei $W_n \sim n \cdot \frac{1}{L(n)}$, wobei L eine gewisse l. v. F. mit $L \to \infty$ ist. Dann gilt*

$$\frac{L(Z_n)}{L(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)} \boldsymbol{U},$$

wobei die Zufallsvariable $\boldsymbol{U}$ gleichverteilt auf $[0,1]$ ist.

BEWEIS. Sei A eine uniforme Menge für ein gewisses $f \in \mathcal{P}_\mu$. Wir nehmen o. E. an, dass L streng monoton wachsend und stetig ist. Dann gilt für jedes $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} \nu\left(\frac{L(Z_n)}{L(n)} \le x\right) &= \nu\left(Z_n \le a_n(x)\right) \\ &= \int_A \sum_{k=0}^{\lfloor a_n(x) \rfloor} \mathbf{1}_{A \cap \{\varphi > n-k\}} \hat{T}^k(f)\ d\mu, \end{aligned}$$

wobei ν das Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Dichte $f \in \mathcal{P}_\mu$ bezeichnet und $a_n(x) := L^{-1}(xL(n))$ ist. Nach Ericksons Lemma (vgl. Lemma 4.3.11) erhält man

$$a_n(x) \to \infty \quad \text{und} \quad \frac{a_n(x)}{n} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Auf Grund der Monotonie der Folge $\left(\mathbf{1}_{A \cap \{\varphi > n\}}\right)$ ergibt sich nach der Asymptotik (1.2.2) einerseits

$$\begin{aligned} \nu\left(\frac{L(Z_n)}{L(n)} \le x\right) &\le \int_A \mathbf{1}_{A \cap \{\varphi > n - \lfloor a_n(x) \rfloor\}} \sum_{k=0}^{\lfloor a_n(x) \rfloor} \hat{T}^k(f)\ d\mu \\ &\sim \mu\left(A \cap \{\varphi > n - \lfloor a_n(x) \rfloor\}\right) \cdot L\left(\lfloor a_n(x) \rfloor\right). \end{aligned}$$

Hieraus und aus Lemma 4.3.6 (vgl. Anhang) folgt

$$\limsup \nu\left(\frac{L(Z_n)}{L(n)} \le x\right) \le x.$$

Andererseits gilt in analoger Weise

$$\begin{aligned} \nu\left(\frac{L(Z_n)}{L(n)} \le x\right) &\ge \int_A \mathbf{1}_{A \cap \{\varphi > n\}} \sum_{k=0}^{\lfloor a_n(x) \rfloor} \hat{T}^k(f)\ d\mu \\ &\sim \mu\left(A \cap \{\varphi > n\}\right) \cdot L\left(\lfloor a_n(x) \rfloor\right). \end{aligned}$$

Daher erhält man

$$\liminf \nu\left(\frac{L(Z_n)}{L(n)} \le x\right) \ge x.$$

Schließlich folgt aus den beiden Abschätzungen

$$\lim_{n \to \infty} \nu\left(\frac{L(Z_n)}{L(n)} \le x\right) = x.$$

Nun ergibt sich die Behauptung nach dem Kompaktheitssatz mit Lemma 3.2.3. □

Unter den Voraussetzungen des Theorems 3.2.6 gilt nach Thalers Theorem 3.1.1 und nach Korollar 3.2.5, dass

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)} 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\Phi_n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)} \infty.$$

Jedoch für das Produkt dieser beiden Prozesse ergibt sich folgendes Korollar.

KOROLLAR 3.2.7. *Unter den Voraussetzungen des Theorems 3.2.6 gilt*

$$\frac{Z_n}{n\Phi_n} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)} \boldsymbol{U},$$

wobei die Zufallsvariable $\boldsymbol{U}$ gleichverteilt auf $[0,1]$ ist.

BEISPIEL 3.2.8 (vgl. [**Tha83**]). Sei f eine Funktion, definiert durch $f(0) = 0$, $f(x) = x + x^2 e^{-1/x}$ für $x > 0$. Es sei $a \in (0,1)$ durch $f(a) = 1$ bestimmt. Dann definiert man die Abbildung $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ durch

$$T(x) := \begin{cases} f(x), & x \in [0,a], \\ \frac{x-a}{1-a}, & x \in (a,1]. \end{cases}$$

Offensichtlich erfüllt die Abbildung T die Thaler-Voraussetzungen (1)–(5) im Beispiel 1.2.11. Somit ist jede messbare Menge $A \in \mathcal{B}_{[0,1]}$ mit $\lambda(A) > 0$, welche von 0 weg beschränkt ist, eine uniforme Menge. Ferner gilt

$$W_n \sim const \cdot \frac{n}{\log(n)} \qquad (n \to \infty).$$

Daher ergibt sich schließlich nach dem Korollar 3.2.5 bzw. Theorem 3.2.6

$$\Phi_n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)} 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\log(Z_n)}{\log(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)} \boldsymbol{U} \qquad (n \to \infty).$$

3.3. Gleichverteilungsgesetz für den Verbrachte-Zeit-Kac-Prozess

In diesem Teilkapitel studieren wir den normalisierten Verbrachte-Zeit-Kac-Prozess im Falle, dass die Wander-Rate $(W_n(A))$ eine l. v. F. ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass A eine uniforme Rückkehrmenge ist. Es wird bewiesen, dass dieser Prozess streng in Verteilung gegen die Gleichverteilung auf $[0,1]$ konvergiert. Dazu werden folgende Lemmata benötigt.

LEMMA 3.3.1. *Es sei A eine uniforme Rückkehrmenge für $f \in \mathcal{P}_\mu$ mit $W_n \sim L(n)$, wobei L den Voraussetzungen in Lemma 4.3.11 genügt, und ferner sei $x \in (0,1)$ fest gewählt. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon \in (0,1)$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und $k \in [n - a_n(x), n]$ gilt*

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{W_n} \leq \hat{T}^k(f) \leq (1+\varepsilon)^2 \frac{1}{W_n}$$

gleichmäßig auf A, wobei $a_n(x)$ wie in Lemma 4.3.11 definiert ist.

BEWEIS. Gemäß der Proposition 2.2.3 gilt

$$W_n \hat{T}^n(f) \longrightarrow 1 \qquad \mu\text{-f. s. gleichmäßig auf } A.$$

Daher gibt es zu jedem $\varepsilon \in (0,1)$ *ein* k_0 derart, dass für alle $k \geq k_0$ gilt μ-f. s. gleichmäßig auf A

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{W_k} \leq \hat{T}^k(f) \leq (1+\varepsilon)\frac{1}{W_k}.$$

Ferner existieren nach Ericksons Lemma 4.3.11 zwei natürlichen Zahlen n_1 und n_2 mit

$$n - a_n(x) \geq k_0 \text{ für alle } n \geq n_1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{W_{\lfloor n-a_n(x)\rfloor}} \leq (1+\varepsilon)\frac{1}{W_n} \text{ für alle } n \geq n_2.$$

Setzt man $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, so ergibt sich wegen der Monotonie von (W_n), dass für alle $n \geq n_0$ und $k \in [n - a_n(x), n]$ gilt

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{W_n} \leq (1-\varepsilon)\frac{1}{W_k} \leq \hat{T}^k(f) \leq (1+\varepsilon)\frac{1}{W_k} \leq \frac{(1+\varepsilon)}{W_{\lfloor n-a_n(x)\rfloor}} \leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{W_n}$$

gleichmäßig auf A. Also folgt die Behauptung. □

LEMMA 3.3.2. *Sei $A \in \mathcal{A}$ eine messbare Menge mit $0 < \mu(A) < \infty$. Dann gilt*

$$\Psi_n \circ T - \Psi_n \xrightarrow[\text{lok. stoch.}]{\mu} 0.$$

BEWEIS. Für $\varepsilon > 0$ fest und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$K_{\varepsilon,n} := \{\varphi \leq n \ \wedge \ |\Psi_n \circ T - \Psi_n| \geq \varepsilon\}.$$

Aus (3.2.5) folgt für alle hinreichend großen n mit $\frac{\mu(A)}{W_n} < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} K_{\varepsilon,n} &\subset T^{-(n+1)}A \cap \left\{n - Z_n \geq \frac{W_n}{\mu(A)}\varepsilon\right\} \\ &= \bigcup_{\frac{W_n}{\mu(A)}\varepsilon \leq k \leq n-1} \{Z_n = n-k\} \cap T^{-(n+1)}A \\ &= \bigcup_{\frac{W_n}{\mu(A)}\varepsilon+1 \leq k \leq n} T^{-(n-k+1)}(A \cap \{\varphi = k\}). \end{aligned}$$

Da μ invariant ist, ergibt sich dann

$$\mu(K_{\varepsilon,n}) \leq \sum_{k=\left\lfloor \frac{W_n}{\mu(A)}\varepsilon+1\right\rfloor}^{n} \mu(A \cap \{\varphi = k\}) \leq \mu\left(A \cap \left\{\varphi \geq \left\lfloor \frac{W_n}{\mu(A)}\varepsilon + 1\right\rfloor\right\}\right),$$

und hieraus

$$\lim_{n\to\infty} \mu(K_{\varepsilon,n}) = 0.$$

Dies impliziert:

$$\lim_{n\to\infty} \nu\left(K_{\varepsilon,n}\right) = 0 \quad \text{für alle } \nu \in \mathcal{P}_\mu.$$

Auf Grund

$$\lim_{n\to\infty} \nu\left(\{\varphi > n\}\right) = 0$$

erhält man schließlich für alle $\nu \in \mathcal{P}_\mu$

$$\lim_{n\to\infty} \nu\left(\{|\Psi_n \circ T - \Psi_n| \geq \varepsilon\}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \nu\left(K_{\varepsilon,n}\right) + \lim_{n\to\infty} \nu\left(\{\varphi > n\}\right) = 0,$$

was zu zeigen war. □

Nun wird das Hauptresultat dieses Teilkapitels formuliert.

THEOREM 3.3.3 (Gleichverteilungsgesetz). *Es sei A eine uniforme Rückkehrmenge. Falls die Wander-Rate (W_n) eine l. v. F. ist, gilt:*

$$\Psi_n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)} \boldsymbol{U}, \tag{3.3.1}$$

wobei die Zufallsvariable $\boldsymbol{U}$ gleichverteilt auf $[0,1]$ ist.

BEWEIS. Es sei A eine uniforme Rückkehrmenge für ein gewisses $f \in \mathcal{P}_\mu$ und $W_n \sim L(n)$ für $n \to \infty$, wobei L eine l. v. F. ist. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass L stetig und streng monoton wachsend ist. Dann gilt für jedes $x \in (0,1)$

$$\begin{aligned} \nu\left(\frac{L(n-Z_n)}{L(n)} \leq x\right) &= \nu\left(Z_n \geq n - a_n(x)\right) \\ &= \int_A \sum_{n-a_n(x)\leq k\leq n} \mathbf{1}_{A\cap(\varphi>n-k)} \hat{T}^k(f)\ d\mu, \end{aligned}$$

wobei $a_n(x) := L^{-1}(xL(n))$ ist. Sei jetzt $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann erhält man nach Lemma 3.3.1 für hinreichend große n:

$$\nu\left(\frac{L(n-Z_n)}{L(n)} \leq x\right) \leq (1+\varepsilon)^2 \frac{1}{W_n} W_{\lfloor a_n(x)\rfloor} \sim (1+\varepsilon)^2 x.$$

Analog gilt für alle hinreichend großen n:

$$x(1-\varepsilon) \sim (1-\varepsilon)\frac{1}{W_n} W_{\lfloor a_n(x)\rfloor} \leq \nu\left(\frac{L(n-Z_n)}{L(n)} \leq x\right).$$

Aus den beiden Abschätzungen folgt dann

$$x(1-\varepsilon) \leq \liminf \nu\left(\frac{L(n-Z_n)}{L(n)} \leq x\right) \leq \limsup \nu\left(\frac{L(n-Z_n)}{L(n)} \leq x\right) \leq (1+\varepsilon)^2 x.$$

Da ε beliebig war, ergibt sich schließlich

$$\nu\left(\frac{L(n-Z_n)}{L(n)} \leq x\right) \longrightarrow x, \quad n\to\infty, \qquad \text{für alle } x \in (0,1). \tag{3.3.2}$$

Um die Behauptung (3.3.1) zu schließen, müssen wir noch zeigen, dass

$$n - Z_n \xrightarrow{\nu} \infty \qquad (n \to \infty)\,. \tag{3.3.3}$$

Dazu wird zuerst bemerkt, dass (3.3.2) äquivalent zu

$$\nu\left(n - Z_n \leq a_n\left(x\right)\right) \longrightarrow x, \quad n \to \infty, \qquad \text{für alle } x \in (0,1) \tag{3.3.4}$$

ist. Angenommen, $(n - Z_n)$ konvergiere nicht stochastisch (bzgl. ν) gegen ∞, dann existiert ein $\varepsilon > 0$, eine streng monoton wachsende Folge $t_n \nearrow \infty$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\nu\left(t_n - Z_{t_n} \leq N\right) \geq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $x \in (0, \varepsilon)$ beliebig, aber fest. Gemäß des Erickson Lemmas gilt dann $\lim_{n\to\infty} a_n\left(x\right) = \infty$. Daher gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$a_{t_n}\left(x\right) \geq N \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Somit erhält man

$$\nu\left(t_n - Z_{t_n} \leq a_{t_n}\left(x\right)\right) \geq \nu\left(t_n - Z_{t_n} \leq N\right) \geq \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Dies impliziert

$$\lim_{n\to\infty} \nu\left(t_n - Z_{t_n} \leq a_{t_n}\left(x\right)\right) \geq \varepsilon,$$

was im Widerspruch zu (3.3.4) steht.
Da $n - Z_n \to \infty$ stochastisch, lässt sich L schließlich durch jede Funktion L_1 mit $L_1\left(n\right) \sim C \cdot L\left(n\right), C > 0$ ersetzen. Dies liefert mit Lemma 3.3.2 nach dem Kompaktheitssatz die Behauptung. □

BEISPIEL 3.3.4 (vgl. [**Tha00**]). Wir betrachten die *Lasota-Yorke-Abbildung* $T : [0,1] \to [0,1]$, definiert durch

$$T\left(x\right) := \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 2x - 1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Diese Abbildung genügt den Thaler-Bedingungen (1)–(4) im Beispiel 2.1.1. So ist jede kompakte Menge A von $(0,1]$ mit $\lambda\left(A\right) > 0$ eine uniforme Rückkehrmenge mit

$$W_n \sim \log\left(n\right) \qquad (n \to \infty)\,.$$

Somit ergibt sich nach dem Theorem 3.3.3, dass

$$\frac{\log\left(n - Z_n\right)}{\log\left(n\right)} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)} \boldsymbol{U}.$$

KAPITEL 4

Ein Grenzwertsatz für Quersummen von Kettenbrüchen

Dieses Kapitel behandelt die zahlentheoretische Anwendung der Ergebnisse aus Kapitel 3. Es wird durch die Farey-Intervallabbildung der Zusammenhang zwischen der unendlichen Ergodentheorie und der Theorie der Kettenbrüche hergestellt, welches zu neuen zahlentheoretischen Ergebnissen führt.

Jede irrationale Zahl $x \in \mathbb{I} := [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ hat eine eindeutige unendliche Kettenbruchentwicklung in der Form

$$x = \cfrac{1}{k_1(x) + \cfrac{1}{k_2(x) + \cdots}}.$$

Dabei sind $k_n(x)$ positive ganze Zahlen. Wir betrachten die *Gauß-Abbildung* $G : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$, definiert durch

$$G(x) := \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Es ist bekannt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$k_n(x) = \left\lfloor \frac{1}{G^{n-1}x} \right\rfloor.$$

Dabei bezeichnet G^n die n-te Iterierte von G für $n \in \mathbb{N}_0$ mit $G^0 = \mathrm{id}$.

Offensichtlich bildet $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf dem Maßraum $(\mathbb{I}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, wobei $\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra in $\mathbb{I}$ bezeichnet und $\mathbb{P}$ ein gewisses Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}$ ist. Ferner hat jede Zufallsvariable k_n einen unendlichen Erwartungswert bezüglich des auf $[0,1]$ eingeschränkten Lebesgue-Maßes λ.

In diesem Kapitel untersuchen wir das Fluktuationsverhalten des Prozesses $(X_n)_{n\geq 1}$, gegeben durch

$$X_n(x) := \max\left\{ \sum_{i=1}^{p} k_i(x) \ : \ \sum_{i=1}^{p} k_i(x) \leq n,\ p \in \mathbb{N}_0 \right\}, \quad x \in \mathbb{I}, \tag{4.0.5}$$

d.h. den Prozess $n - X_n$.

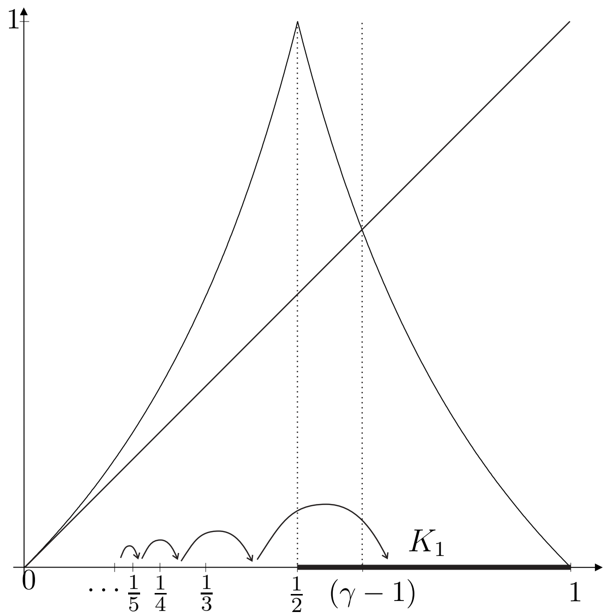

ABBILDUNG 4.1.1. Die Farey-Abbildung T und die uniforme Rückkehrmenge K_1. 0 ist der einzige indifferente Fixpunkt, während $\gamma - 1$ ist ein weiterer Fixpunkt von T. Dabei bezeichnet γ den Goldenen Schnitt. Für $n \geq 2$ gilt $T(1/(n+1), 1/n] = (1/n, 1/(n-1)]$.

4.1. Die Farey-Intervallabbildung

Wir betrachten die *Farey-Abbildung* $T : [0,1] \to [0,1]$, definiert durch

$$T(x) := \begin{cases} T_0(x), & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ T_1(x), & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

wobei

$$T_0(x) := \frac{x}{1-x} \qquad \text{und} \qquad T_1(x) := \frac{1}{x} - 1.$$

Mit den Bezeichnungen $B(0) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $B(1) = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ und $J = \{0\}$ ersieht man leicht, dass die Farey-Abbildung die Thaler-Voraussetzungen im Beispiel 1.2.11 erfüllt. Ferner ist es einfach zu zeigen, dass $\hat{T}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ für $h(x) := \frac{d\mu}{d\lambda}(x) = \frac{1}{x}$ gilt. Somit bildet $([0,1], T, \mathcal{B}, \mu)$ ein konservatives ergodisches invariantes dynamisches System. Jede vom indifferenten Fixpunkt 0 weg beschränkte messbare Menge $A \in \mathcal{B}_{[0,1]}$ mit $\lambda(A) > 0$ ist eine uniforme Menge. Weiter erhält man

$$W_n := W_n\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \int_{\frac{1}{n+2}}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \log(n+2) \sim \log(n) \qquad (n \to \infty).$$

Für die Inversen der beiden Zweige setzen wir

$$u_0(x) := (T_0)^{-1}(x) = \frac{x}{1+x},$$
$$u_1(x) := (T_1)^{-1}(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Es ist zu bemerken, dass für $x \neq 0$ die Abbildung $x \mapsto u_0(x)$ konjugiert zu der Rechtstranslation $x \mapsto F(x) := x+1$ ist; d.h.

$$u_0 = J \circ F \circ J \qquad \text{mit} \quad J(x) = J^{-1}(x) = \frac{1}{x}.$$

Daher erhält man für die n-te Iterierte

$$u_0^n(x) = J \circ F^n \circ J(x) = \frac{x}{1+nx}. \tag{4.1.1}$$

Außerdem gilt $u_1(x) = (J \circ F)(x)$.

Nun sei $\mathcal{F} = \{K_n\}_{n \geq 1}$ die abzählbare Familie von paarweise disjunkten Teilintervallen von $[0,1]$, gegeben durch $K_n := \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$. Wir setzen $K_0 := [0,1)$, so es ist leicht zu verifizieren, dass $T(K_n) = K_{n-1}$ für alle $n \geq 1$ gilt.

Die *erste Eintrittszeit* $e : \mathbb{I} \to \mathbb{N}$ im Intervall K_1 ist definiert durch

$$e(x) := \min\left\{k \geq 0 : \; T^k(x) \in K_1\right\}.$$

Der Zusammenhang zwischen der ersten Eintrittszeit e und dem ersten Eingang k_1 der Kettenbruchentwicklung ist gegeben durch

$$k_1(x) = 1 + e(x) \quad \text{und} \quad \varphi(x) = k_1 \circ T(x), \quad x \in \mathbb{I}. \tag{4.1.2}$$

Ferner betrachten wir die *induzierte Abbildung* $S : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$, definiert durch

$$S(x) := T^{e(x)+1}(x).$$

In der Tat gilt für alle $n \geq 1$

$$\{x \in \mathbb{I} : \; e(x) = n-1\} = K_n \cap \mathbb{I}.$$

Daher ergibt sich durch (4.1.1), dass für alle $x \in K_n \cap \mathbb{I}$

$$S(x) = T^n(x) = T_1 \circ T_0^{n-1}(x) = \frac{1}{x} - n = \frac{1}{x} - k_1(x).$$

Dies bedeutet, dass die induzierte Transformation S mit der Gauß-Abbildung übereinstimmt.

Um zu zeigen, dass $K_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ eine uniforme Rückkehrmenge ist, benötigen wir folgendes Lemma:

LEMMA 4.1.1. *Für*

$$\mathcal{D} := \left\{f \in \mathcal{P}_\mu : \; f \in \mathcal{C}^2((0,1)) \; \textit{mit } f' > 0 \textit{ und } f'' \leq 0\right\}$$

gilt:

$$f \in \mathcal{D} \quad \Longrightarrow \quad \hat{T}^n(f) \in \mathcal{D} \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, dass die Behauptung für $n = 1$ gilt. Anschließend ergibt sich das Lemma durch Induktion. In der Tat hat man für $f \in \mathcal{D}$

$$\hat{T}(f) = \frac{1}{h} \cdot \hat{P}(h \cdot f),$$

wobei $\hat{P}$ den Frobenius-Perron-Operator von T bzgl. des Lebesgue-Maßes λ bezeichnet. Benutzt man die Inversen beider Zweige, so lässt sich $\hat{P}$ in der folgenden Form darstellen:T

$$\hat{P}(g) = g \circ u_0 \cdot \left|u_0'\right| + g \circ u_1 \cdot \left|u_1'\right|, \quad \text{für alle } g \in L_1(\lambda).$$

Daher gilt für alle $x \in [0,1]$

$$\hat{T}(f)(x) = \frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right) + xf\left(\frac{1}{x+1}\right)}{x+1}.$$

So ist $\hat{T}(f)$ differenzierbar und durch die Monotonie von f sowie f' ergibt sich dann

$$\hat{T}(f)'(x) = \underbrace{\frac{f'\left(\frac{x}{x+1}\right) - xf'\left(\frac{1}{x+1}\right)}{(x+1)^3}}_{>0} + \underbrace{\frac{f\left(\frac{1}{x+1}\right) - f\left(\frac{x}{x+1}\right)}{(x+1)^2}}_{>0}.$$

Das bedeutet $\hat{T}(f)' > 0$.

Außerdem verifiziert man leicht, dass

$$\hat{T}(f)''(x) = \frac{f''\left(\frac{x}{x+1}\right) + xf''\left(\frac{1}{x+1}\right) + 2(x+1)\left((x-1)f'\left(\frac{1}{x+1}\right) - 2f'\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)}{(x+1)^5} + \frac{2\left(f\left(\frac{x}{x+1}\right) - f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)}{(x+1)^3} \leq 0,$$

was den Beweis abschließt. □

BEMERKUNG 4.1.2. Es wird noch bemerkt, dass $\mathcal{D} \neq \emptyset$ ist, da $f = \text{id.} \in \mathcal{D}$.

LEMMA 4.1.3. *Die messbare Menge $K_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ ist eine uniforme Rückkehrmenge für jede Funktion $f \in \mathcal{D}$, so dass $h \cdot f$ Riemann-integrierbar ist (beachte $h = \frac{1}{x}$).*

BEWEIS. Wir haben nur zu zeigen, dass die Funktionenfolge $\left(\hat{T}^n(f)\,|_{K_1}\right)$ monoton fallend ist. Dann folgt die Behauptung unmittelbar aus den Propositionen 1.2.12

und 2.2.4. In der Tat gilt für alle $x \in K_1$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} \hat{T}^{n+1}(f)(x) &= \frac{\hat{T}^n(f)\left(\frac{x}{x+1}\right) + x\hat{T}^n(f)\left(\frac{1}{x+1}\right)}{x+1} \\ &= \frac{1}{x+1}\hat{T}^n(f)\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{x}{x+1}\hat{T}^n(f)\left(\frac{1}{x+1}\right). \end{aligned}$$

Gemäß Lemma 4.1.1 ist $\hat{T}^n(f)$ konkav und monoton fallend auf $[0,1]$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, so ergibt sich wegen $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1} = 1$ aus der obigen Gleichheit, dass

$$\hat{T}^{n+1}(f)(x) \leq \hat{T}^n(f)\left(\frac{2x}{(x+1)^2}\right) \leq \hat{T}^n(f)(x) \quad \text{für alle } x \geq \sqrt{2} - 1.$$

Dies impliziert die Behauptung. □

4.2. Gleichverteilungs- und Große-Deviation-Gesetz

Sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der *Rückkehrzeiten* nach K_1; d.h. eine Folge $\mathbb{N}$-wertiger Zufallsvariablen, rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} \tau_1(x) &:= \varphi(x) = \min\{p \geq 1 : T^p(x) \in K_1\}, \quad x \in [0,1], \\ \tau_n(x) &:= \min\{p \geq 1 : T^{p+\sum_{k=1}^{n-1}\tau_k(x)}(x) \in K_1\}, \quad x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Der Erneuerungsprozess ist dann gegeben durch

$$N_0 \equiv 0, \qquad N_n(x) := \begin{cases} \max\{k \leq n : S_k(x) \leq n\}, & x \in A_n, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad n \geq 1,$$

wobei

$$A_n := \bigcup_{k=0}^{n} T^{-k}K_1, \qquad S_0 \equiv 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es ist wichtig zu bemerken, dass

$$S_{N_n(x)}(x) = Z_n(x) := \begin{cases} \max\left\{k \leq n : T^k(x) \in K_1\right\}, & x \in A_n, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Weiter betrachten wir den normalisierten Verbrachte-Zeit-Kac-Prozess

$$\Psi_n := \frac{\sum_{k=0}^{n-Z_n} \mu(K_1 \cap \{\varphi > k\})}{\mu(A_n)} = \frac{W_{n-Z_n}}{W_n}.$$

Im nächsten Lemma wird der Zusammenhang zwischen dem Erneuerungsprozess Z_n und der Quersumme X_n der Kettenbrüche hergestellt.

LEMMA 4.2.1. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt für den in (4.0.5) definierten Prozess X_n:*

$$X_n(x) = \begin{cases} 1 + Z_{n-1}, & x \in A_{n-1}, \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases} \qquad x \in \mathbb{I},\ n \geq 1.$$

BEWEIS. Mit (4.1.2) folgt gemäß der Definition des Prozesses S_{N_n}:

Für $x \in \mathbb{I} \cap A_{n-1}^c$ gilt $k_1(x) > n$, woraus $X_n(x) = 0$ folgt.

Für $x \in \mathbb{I} \cap A_{n-1}$ unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: Falls der Prozess in $x \in K_1$ startet, dann gilt $k_1(x) = 1$ und folglich induktiv

$$k_n(x) = \tau_{n-1}(x) \qquad \text{für alle } n \geq 2.$$

2. Fall: Falls der Prozess in $x \in K_1^c$ startet, dann erhält man $k_1(x) = 1 + \tau_1(x)$ und somit induktiv

$$k_n(x) = \tau_n(x) \qquad \text{für alle } n \geq 2.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. □

THEOREM 4.2.2 (Große Deviation-Gesetz). *Für jede Funktion $f \in \mathcal{D}$ mit $h \cdot f$ Riemann-integrierbar und jedes $a \in (0,1)$ gilt*

$$\nu\left(\frac{n - X_n}{n} > a\right) \sim \frac{-\log(a)}{\log(n)} \quad \textit{für} \quad n \to \infty. \tag{4.2.2}$$

Dabei bezeichnet ν das Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Dichte f.

BEWEIS. $a \in (0,1)$ sei fest. Gemäß des vorherigen Lemmas 4.2.1 gilt offensichtlich

$$\nu\left(\frac{n - Z_n}{n} > a\right) \sim \nu\left(\frac{n - X_n}{n} > a\right) \qquad (n \to \infty).$$

D.h., um die Behauptung (4.2.2) zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass

$$\nu\left(\frac{n - Z_n}{n} > a\right) \sim \frac{-\log(a)}{\log(n)}, \quad n \to \infty.$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \nu\left(\frac{n - Z_n}{n} > a\right) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n(1-a) \rfloor} \nu\left(A_n \cap \{Z_n = k\}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n(1-a) \rfloor} \nu\left(T^{-k}\left(K_1 \cap \{\varphi > n - k\}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n(1-a) \rfloor} \int_{K_1} \mathbf{1}_{K_1 \cap \{\varphi > n-k\}} \hat{T}^k(f)\ d\mu. \end{aligned}$$

$\varepsilon \in (0,1)$ und $\delta \in (0, 1-a)$ seien beliebig, aber fest. Dann schreiben wir

$$\nu\left(\frac{n - Z_n}{n} > a\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor n\delta\rfloor - 1} \cdots + \sum_{k=\lfloor n\delta\rfloor}^{\lfloor n(1-a)\rfloor} \cdots =: \; I(n) + J(n).$$

Zunächst beobachten wir, dass wegen $K_1 \cap \{\varphi > n\} = \left[\frac{n+1}{n+2}, 1\right]$ gilt

$$\mu\left(K_1 \cap \{\varphi > n\}\right) = \int_{\frac{n+1}{n+2}}^{1} \frac{1}{x}\, dx \;\sim\; \frac{1}{n} \qquad (n \to \infty). \tag{4.2.3}$$

Nun ist $I(n)$ abzuschätzen. Durch die Monotonie von $\left(\mathbf{1}_{K_1 \cap \{\varphi > n\}}\right)$ erhält man

$$I(n) \leq \int_{K_1} \mathbf{1}_{K_1 \cap \{\varphi > n+1-\lfloor n\delta\rfloor\}} \sum_{k=0}^{\lfloor n\delta\rfloor - 1} \hat{T}^k(f)\; d\mu.$$

Aus (4.2.3) und (1.2.2) ergibt sich dann unter Berücksichtigung der Tatsache, dass K_1 eine uniforme Menge für f ist, für alle hinreichend großen n:

$$\begin{aligned} I(n) &\leq (1+\varepsilon)^2 \frac{\lfloor n\delta\rfloor - 1}{n - \lfloor n\delta\rfloor + 1} \cdot \frac{1}{\log\left(\lfloor n\delta\rfloor - 1\right)} \\ &\sim (1+\varepsilon)^2 \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \frac{1}{\log(n)} \quad \text{für} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Somit

$$\limsup\left(\log(n) \cdot I(n)\right) \leq (1+\varepsilon)^3 \frac{\delta}{1-\delta}.$$

Setzt man $\delta \to 0$, so erhält man schließlich

$$I(n) = o\left(\frac{1}{\log(n)}\right), \quad n \to \infty. \tag{4.2.4}$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$J(n) \sim \frac{-\log(a)}{\log(n)}, \quad n \to \infty. \tag{4.2.5}$$

Zuerst liefert eine ähnliche Argumentation wie im Lemma 3.3.1, dass für alle hinreichend großen n und $k \in \left[\lfloor n\delta\rfloor, \lfloor n(1-a)\rfloor\right]$ gleichmäßig auf K_1 gilt

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{\log(n)} \leq \hat{T}^k(f) \leq (1+\varepsilon)^2 \frac{1}{\log(n)}. \tag{4.2.6}$$

Betrachten wir die rechte Seite der Ungleichung (4.2.6) sowie die Asymptotik (4.2.3), so erhält man für genügend große n

$$\begin{aligned} J(n) &\leq \frac{(1+\varepsilon)^2}{\log(n)} \cdot \sum_{k=n-\lfloor n(1-a)\rfloor}^{n-\lfloor n\delta\rfloor} \mu\left(K_1 \cap \{\varphi > k\}\right) \\ &\sim \frac{(1+\varepsilon)^2}{\log(n)} \cdot \log\left(\frac{1-\delta}{a}\right) \quad \text{für} \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

welches

$$\limsup\left(\log(n)\cdot J(n)\right)\leq(1+\varepsilon)^3\log\left(\frac{1-\delta}{a}\right)$$

impliziert.

Andererseits benutzt man die linke Seite der Ungleichung (4.2.6), so ergibt sich in analoger Weise, dass

$$\liminf\left(\log(n)\cdot J(n)\right)\geq(1-\varepsilon)^2\log\left(\frac{1-\delta}{a}\right).$$

Da ε und δ beliebig waren, folgt schließlich (4.2.5).

Aus (4.2.4) und (4.2.5) erhält man dann die Behauptung. □

THEOREM 4.2.3 (Gleichverteilungsgesetz). *Für den Prozess X_n gilt*

$$\frac{\log(n-X_n)}{\log(n)}\xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)}\boldsymbol{U},\tag{4.2.7}$$

wobei die Zufallsvariable $\boldsymbol{U}$ gleichverteilt auf $[0,1]$ ist.

BEWEIS. Mit Lemma 4.1.3 und der Tatsache, dass $W_n\sim\log(n)$ ist, ergibt sich nach Theorem 3.3.3, dass

$$\frac{W_{n-Z_n}}{\log n}\xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)}\boldsymbol{U}.$$

Dies liefert, dass

$$n-Z_n\xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)}\infty$$

und somit

$$\frac{W_{n-Z_n}}{\log(n-Z_n)}\xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)}1.$$

Schließlich folgt die Behauptung unmittelbar aus Lemma 4.2.1. □

KOROLLAR 4.2.4. *Offensichtlich gelten die Aussagen der obigen Theoreme für das auf $[0,1]$ eingeschränkte Lebesgue-Maß λ (beachte $\lambda\in\mathcal{D}$). Insbesondere erhält man als direkte Konsequenz des Theorems 4.2.2*

$$\frac{n-X_n}{n}\xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)}0,$$

da $\lambda\sim\mu$ ist. Ferner folgt aus (4.2.7), dass

$$n-X_n\xrightarrow{\mathcal{L}(\mu)}\infty.$$

Anhang

Im Anhang werden die wichtigsten Tatsachen über die Theorie der regulären Variation zusammengestellt, die für das Verständnis dieser Arbeit wesentlich sind. Die hier nicht bewiesenen Aussagen sind mit Ausnahme des Lemmas 4.3.11 in den Lehrbüchern [**Sen76**] bzw. [**BGT89**] zu finden.

4.3. Regulär variierende Funktionen und Taubersche Sätze

DEFINITION 4.3.1. Eine messbare Funktion $R : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $R > 0$ auf (a, ∞) für gewisses $a > 0$, heißt *regulär variierende* Funktion (r. v. F.) für $x \to \infty$ mit Exponent $\rho \in \mathbb{R}$, falls gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(\lambda x)}{R(x)} = \lambda^\rho \quad \text{für alle } \lambda > 0.$$

Eine r. v. F. L mit Exponent $\rho = 0$ nennt man *langsam variierende* Funktion (l. v. F.) für $x \to \infty$. In diesem Fall gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(\lambda x)}{R(x)} = 1 \quad \text{für alle } \lambda > 0.$$

Eine messbare Funktion R heißt *regulär variierend* für $x \to 0$, falls $x \mapsto R\left(\frac{1}{x}\right)$ eine r. v. F. für $x \to \infty$ ist.

Eine Folge $(u_n)_{n\geq 1}$ heißt *regulär variierende* Folge (ebenfalls abgekürzt mit r. v. F.) für $n \to \infty$ mit Exponent $\rho \in \mathbb{R}$, falls es eine r. v. F. R gibt, so dass

$$u_n = R(n) \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

BEMERKUNG 4.3.2. Es sei Folgendes zu bemerken:

- R ist genau dann eine r. v. F. f*ür* $x \to \infty$ mit Exponent $\rho \in \mathbb{R}$, wenn es eine l. v. F. L f*ür* $x \to \infty$ gibt mit

$$R(x) = x^\rho L(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

- $(u_n)_{n\geq 1}$ ist genau dann eine r. v. F. für $n \to \infty$ mit Exponent $\rho \in \mathbb{R}$, wenn für alle $\lambda > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{\lfloor \lambda n \rfloor}}{u_n} = \lambda^\rho.$$

Die beiden folgenden Sätze spielen eine fundamentale Rolle in der Entwicklung dieser Theorie.

PROPOSITION 4.3.3 (Satz der gleichmäßigen Konvergenz). *Es sei L eine l. v. F. für $x \to \infty$. Dann gilt für jedes feste Intervall $[a,b]$ mit $0 < a < b < \infty$*

$$\sup_{\lambda \in [a,b]} \left| \frac{L(\lambda x)}{L(x)} - 1 \right| \longrightarrow 0 \qquad (x \to \infty).$$

PROPOSITION 4.3.4 (Darstellungssatz). *L sei eine l. v. F. für $x \to \infty$ mit $L > 0$ auf (a,∞), $a > 0$. Dann gibt es ein $B \geq a$, so dass*

$$L(x) = \psi(x) \exp\left(\int_B^x \frac{\zeta(t)}{t}\, dt \right) \quad \textit{für alle } x \geq B,$$

wobei ψ eine positive messbare beschränkte Funktion auf (B,∞) und ζ eine stetige Funktion auf (B,∞) ist mit

$$\psi(x) \longrightarrow C \in (0,\infty) \quad \textit{und} \quad \zeta(x) \longrightarrow 0 \qquad (x \to \infty).$$

Wir werden die folgenden unmittelbaren Konsequenzen benötigen.

LEMMA 4.3.5. *Für eine l. v. F. L gelten für alle $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{x \to \infty} x^{-\varepsilon} L(x) = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{x \to \infty} x^{\varepsilon} L(x) = \infty.$$

LEMMA 4.3.6. *Gegeben seien zwei positive Folgen (p_n) und (q_n) mit $p_n, q_n \to \infty$, so dass für alle genügend großen n gilt*

$$0 < K_1 < \frac{p_n}{q_n} < K_2 < \infty \qquad (K_1 \textit{ und } K_2 \textit{ sind Konstanten}).$$

Dann folgt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{L(p_n)}{L(q_n)} = 1.$$

LEMMA 4.3.7. *Für eine langsam variierende Folge (ebenfalls abgekürzt mit l. v. F.) (l_n) gelten für alle $\varepsilon > 0$*

$$\sup_{m \leq n} (m^{\varepsilon} l_m) \sim n^{\varepsilon} l_n \quad \textit{und} \quad \inf_{m \leq n} \left(m^{-\varepsilon} l_m\right) \sim n^{-\varepsilon} l_n \qquad (n \to \infty).$$

Der folgende Taubersche Satz wird dazu verwendet, gewisse asymptotische Aussagen in dieser Arbeit herzuleiten.

THEOREM 4.3.8 (Karamata-Tauberscher Satz). *Gegeben seien eine l. v. F. L für $x \to \infty$ mit Exponent $\rho \in [0, \infty)$ und eine Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ nichtnegativer reeller Zahlen derart, dass die Laplace-Transformierte $B(s) := \sum_{n\geq 0} b_n e^{-ns}$ für alle $s > 0$ existiere. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $B(s) \sim \left(\frac{1}{s}\right)^{\rho} L\left(\frac{1}{s}\right)$ *für* $s \to 0$.
(2) $\sum_{k=0}^{n-1} b_k \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} n^{\rho} L(n)$ *für* $n \to \infty$.

Ist (b_n) zusätzlich monoton und $\rho > 0$, dann sind beide Aussagen äquivalent zu

$$b_n \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)} n^{\rho-1} L(n) \qquad (n \to \infty).$$

LEMMA 4.3.9 (Karamatas Lemma). *Sei (a_n) eine r. v. F. mit Exponent $\rho \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $p \geq -\rho - 1$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{p+1} a_n}{\sum_{k\leq n} k^p a_k} = p + \rho + 1.$$

LEMMA 4.3.10. *Gegeben sei $(b_n)_{n\geq 0}$ eine monoton wachsende Folge nichtnegativer reeller Zahlen derart, dass die Laplace-Transformierte $B(s) := \sum_{n\geq 0} b_n e^{-ns}$ für alle $s > 0$ existiere. Dann gilt*

$$b_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad (n \to \infty).$$

LEMMA 4.3.11 (Ericksons Lemma [**Eri70**]). *Sei L eine streng monoton wachsende stetige l. v. F. mit $L \uparrow \infty$. Setzen wir für alle $x \in (0, 1)$*

$$a_t(x) := L^{-1}(xL(t)),$$

wobei L^{-1} die Umkehrfunktion von L bezeichnet. Dann gilt für jedes $x \in (0, 1)$

$$a_t(x) = o(t) \quad \textit{und} \quad a_t(x) \longrightarrow \infty \qquad (t \to \infty).$$

Literaturverzeichnis

[Aar97] J. Aaronson. *An introduction to infinite ergodic theory*, volume 50 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[BGT89] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels. *Regular variation*, volume 27 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Bil79] P. Billingsley. *Probability and measure*. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1979. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

[Bir31] G. D. Birkhoff. Proof of the ergodic theorem. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 17:656–660, 1931.

[Den05] M. Denker. *Einführung in die Analysis dynamischer Systeme*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[Dyn61] E. B. Dynkin. Some limit theorems for sums of independent random variables with infinite mathematical expectations. In *Select. Transl. Math. Statist. and Probability, Vol. 1*, pages 171–189. Inst. Math. Statist. and Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1961.

[Els96] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, 1996.

[Eri70] K. B. Erickson. Strong renewal theorems with infinite mean. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 151:263–291, 1970.

[Hop37] E. Hopf. *Ergodentheorie.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 5, H. 2. Berlin: Julius Springer. 83 S., 4 Fig. , 1937.

[KS59] M. Kesseböhmer and M. Slassi. A distributional limit law for continued fraction digit sums. *preprint*, pages 1–15, 2005. arXiv:math. NT/0509559.

[KS09] M. Kesseböhmer and M. Slassi. Limit laws for distorted return time processes for infinite measure preserving transformations. *preprint*, pages 1–20, 2005. arXiv:math. DS/0509609.

[Lam58] John Lamperti. Some limit theorems for stochastic processes. *J. Math. Mech.*, 7:433–448, 1958.

[Sen76] E. Seneta. *Regularly varying functions*. Springer-Verlag, Berlin, 1976. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 508.

[Tha80] M. Thaler. Estimates of the invariant densities of endomorphisms with indifferent fixed points. *Israel J. Math.*, 37(4):303–314, 1980.

[Tha83] M. Thaler. Transformations on $[0,\ 1]$ with infinite invariant measures. *Israel J. Math.*, 46(1-2):67–96, 1983.

[Tha95] M. Thaler. A limit theorem for the Perron-Frobenius operator of transformations on $[0, 1]$ with indifferent fixed points. *Israel J. Math.*, 91(1-3):111–127, 1995.

[Tha98] M. Thaler. The Dynkin-Lamberti arc-sine laws for measure preserving transformation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350:4593–4607, 1998.

[Tha00] M. Thaler. The asymptotics of the Perron-Frobenius operator of a class of interval maps preserving infinite measures. *Studia Math.*, 143(2):103–119, 2000.

[vN32] J. von Neumann. Proof of the quasi-ergodic hypothesis. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 18:70–82, 1932.

Index