

FABIAN DREHER

ÜBER AUSSTRÖMRATEN SPEZIELLER FLÜSSE

ÜBER AUSSTRÖMRATEN SPEZIELLER FLÜSSE

FABIAN DREHER

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften

– Dr. rer. nat. –



vorgelegt im Fachbereich 3 (Mathematik und Informatik)
der Universität Bremen

im August 2015

Datum des Promotionskolloquiums: 18.09.2015

Gutachter: Prof. Dr. Marc Keßeböhmer (Universität Bremen)
Dr. Johannes Jaerisch (Shimane University, Japan)

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit werden Ausströmraten für mit einem Loch versehene Strömungen unter einer Funktion untersucht. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Beziehung zwischen der Ausströmrates und der Dachfunktion der Strömung.

Es wird gezeigt, dass die Ausströmrates zu einem fest gewählten Loch stetig bezüglich der Supremumsnorm von der Dachfunktion abhängt, was eine Berechnung durch Approximationsverfahren ermöglicht. Mittels zweier verschiedener Beweistechniken wird bewiesen, dass das Reziproke der Ausströmrates sublinear ist, wenn die Basis der Strömung durch einen Markovshift auf einem endlichen Alphabet gegeben ist. Zunächst geschieht dies unter Zuhilfenahme von Resultaten der Amöbentheorie, und anschließend wird ein zweiter Beweis mittels einer Formulierung der Ausströmrates als induziertem Druck gegeben.

Für die lokale Ausströmrates wird gezeigt, dass sie unter geeigneten Bedingungen – beispielsweise der erwähnten Markovshiftsituation – von der Dachfunktion nur über deren Integral abhängt. Ferner wird untersucht, wie sich die Ausströmrates bei festgehaltener Dachfunktion für auf einen periodischen Punkt hin schrumpfende Löcher verhält. Man erhält dabei für Strömungen, die durch eine Zylinderfunktion über einem Markovshift gegeben sind, eine Form von Potenzreihenentwicklung für die Ausströmrates. Aus den Koeffizienten dieser Entwicklung ergibt sich eine explizite Formel für die lokale Ausströmrates, und es wird gezeigt, dass die Kenntnis der Ausströmrates bezüglich der Strömung sowie der Maße von Mengen in der Basis genügt, um die Orbitlängen periodischer Punkte bezüglich der Strömung zu ermitteln.

ABSTRACT

This thesis examines escape rates for suspension flows with a hole, focusing on the relation between the escape rate and the ceiling function of the flow.

It is shown that the escape rate for a fixed hole depends continuously on the ceiling function with regard to the supremum norm. This allows the calculation of the escape rate using approximation techniques. In two different ways it is proved that the reciprocal of the escape rate is sublinear if the base transformation of the flow is a Markov shift. First this is achieved by using results from the theory of amoebas, then a second proof is given that employs a formulation of the escape rate as an induced pressure.

For the local escape rate it is shown that under suitable conditions – for example the aforementioned Markov shift setting – its value depends on the ceiling function only through its integral. Furthermore, the behaviour of the escape rate is investigated for a fixed ceiling function and holes shrinking towards a periodic point. For flows that arise from a cylinder function over a Markov shift, one obtains a kind of power series expansion for the escape rate. The coefficients of this expansion lead to an explicit formula for the local escape rate and it is shown that it is sufficient to know the escape rates with respect to the flow and the measure of sets in the basis in order to recover the orbit lengths of periodic points of the flow.

*Das wiegt alles auf:
Daß wir uns gewöhnen, ruhig zu schlafen.
Daß wir aus dem vollen leben, als gäbe es
übergenug von diesem seltsamen Stoff Leben.*

— Christa Wolf

DANKSAGUNG

Mein Dank gilt den Mitgliedern der Arbeitsgruppe *Dynamische Systeme und Geometrie* an der Universität Bremen für das wissenschaftliche Umfeld, in dem ich die letzten Jahre arbeiten durfte und die Freundschaft, die sie mir entgegen gebracht haben. Besonders danke ich meinem Betreuer Prof. Dr. Marc Keßeböhmer für seine Unterstützung und sein stets offenes Ohr, Dr. Tony Samuel für seine ansteckende Begeisterung für Mathematik und Herrn Maik Gröger für seine Denkanstöße aus der Perspektive eines Physikers.

Meinen Eltern danke ich für den Rückhalt und die Unterstützung, die sie mir haben zuteil werden lassen.

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG	1
1 VORBEREITUNGEN	9
2 DIE AUSSTRÖMRATE	17
3 BERECHNEN DER AUSSTRÖMRATE	25
3.1 Berechnen der Ausströmrates in diskreten Systemen	28
3.2 Berechnen der Ausströmrates für Halbströmungen unter einer Funktion	35
4 KONVEXITÄT DER REZIPROKEN AUSSTRÖMRATE	43
4.1 Amöben	45
4.2 Beweis der Konvexität von ρ^{-1}	49
4.3 Die Ausströmrates als induzierter Druck	51
5 EXPLIZITE ERGEBNISSE ZUR AUSSTRÖMRATE IN EINIGEN EINFACHEN SITUATIONEN	57
5.1 Asymptotisches Verhalten der Ausströmrates für einfache Zylinderfunktionen	57
5.2 Die Ableitung der Ausströmrates	64
6 DIE LOKALE AUSSTRÖMRATE	69
7 DAS UMKEHRPROBLEM	79
7.1 Eine alternative Beschreibung von $\bar{\mathcal{L}}_{op}$	82
7.1.1 Das Verfahren von Cristadoro, Knight und Degli Esposti	83
7.1.2 Anwendung auf schrumpfende Löcher	93
7.2 Die Lösung des Umkehrproblems	102
A MATRIZEN	107
A.1 Operatornorm und Spektralradius	107
A.2 Nichtnegative Matrizen	108
LITERATURVERZEICHNIS	113

*The fate has handed you a flow.
What are you to do about it?*

— Predrag Cvitanović

EINLEITUNG

Als offenes dynamisches System bezeichnet man ein dynamisches System, aus dem bei fortschreitender Zeit Masse entweicht. Man kann aus einem geschlossenen System ein offenes machen, indem man eine Teilmenge des Phasenraums als Loch definiert und Bahnen nur so lange verfolgt, bis sie das Loch passieren. Neben der Untersuchung bedingt invarianter Maße [PY1979, CMS1997, LMD2003] wurde in jüngerer Zeit bei der Betrachtung offener dynamischer Systeme das Augenmerk verstärkt auf die Untersuchung von Ausströmraten und ihrer Abhängigkeit von Position und Größe des Lochs gerichtet [KL2009, BY2011, FP2012, BJP2014]. Die Ausströmrates $\rho(A)$ beschreibt, mit welcher asymptotischen Geschwindigkeit Masse das System durch das Loch $A \subset X$ verlässt. Sie ist definiert als

$$\rho(A) := \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \mu \left(\left\{ x \in X \mid \begin{array}{l} x \text{ hat bis zum Zeitpunkt } t \\ \text{das Loch } A \text{ noch nicht passiert} \end{array} \right\} \right).$$

Hierbei bezeichnet μ das invariante Maß des zugrundeliegenden geschlossenen dynamischen Systems. Die im System verbliebene Masse verhält sich also asymptotisch wie $e^{-\rho(A) \cdot t}$, wobei eine größere Ausströmrates einen schnelleren Masseverlust bedeutet. Da die Ausströmrates nur dann einen Wert größer als Null haben kann, wenn letztlich die gesamte Masse des Systems durch das Loch entweicht, ist es eine natürliche Annahme, Systeme zu betrachten, die ergodisch sind, da in diesem Fall für Löcher von positivem Maß sichergestellt ist, dass die Menge der das System nie verlassenden Punkte das Maß Null hat.

In dieser Arbeit werden Ausströmrates im Kontext von Strömungen untersucht. Die betrachteten dynamischen Systeme haben also keine diskreten Iterationen, sondern einen kontinuierlichen Zeitparameter. Da nach einem grundlegenden Resultat von Ambrose [Amb1941] jede ergodische Strömung isomorph zu einer Strömung unter einer Funktion ist, ist es sinnvoll, diesem speziellen Typ von Strömung größere Aufmerksamkeit zu widmen. Eine Strömung Φ unter einer Funktion entsteht aus einer Basistransformation $\theta : X \rightarrow X$ und einer positiven, von Null weg

beschränkten, messbaren Dachfunktion $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ ([Definition 1.4](#)). Anschaulich kann man sich vorstellen, dass Punkte im Raum

$$\bar{X} := \{(x, s) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 \leq s < \varphi(x)\}$$

durch die Strömung in der zweiten Komponente nach oben bewegt werden, bis sie die Dachfunktion erreichen, dann gemäß der Basistransformation zu einem neuen Punkt am Boden springen und anschließend diesen Prozess wiederholen.¹ Eigenschaften des Gesamtsystems ergeben sich aus den Merkmalen von Basis und Dachfunktion, wobei es je nach betrachtetem Wesenszug variiert, ob Basis oder Dach oder eine Kombination von beidem den Ausschlag für das Verhalten des Gesamtsystems geben. So ist beispielsweise eine Strömung unter einer Funktion genau dann ergodisch, wenn die Basistransformation ergodisch ist. Die Gestalt der Dachfunktion ist für die Ergodizität des Systems also unerheblich. Mischungseigenschaften des Systems hängen dagegen durchaus von der Dachfunktion ab [[Tot1970](#), [Bla1976](#), [OS1977](#), [Koc2002](#)]. Die Untersuchung dieses reizvollen Zusammenspiels zwischen Basis und Dach bezüglich der Auswirkungen auf Ausströmraten ist das Leitmotiv dieser Arbeit, wobei insbesondere die Abhängigkeit der Ausströmrates von der Dachfunktion bei festbleibender Basistransformation ins Blickfeld gerückt wird.

In [Kapitel 1](#) wird die grundlegende Terminologie zu Strömungen und Markovshifts festgelegt. Mit einem invarianten Markovmaß versehene symbolische Shifts auf einem endlichen Alphabet sind der hauptsächlich verwendete Typ von Basistransformationen in dieser Arbeit. Es sei darauf hingewiesen, dass symbolische Shifts dabei nicht nur ein Spielzeugmodell sind, sondern mittels der Ulamschen Methode auch zur Approximation allgemeinerer Systeme eingesetzt werden können [[BFGM2014](#)]. Als Dachfunktionen werden nahezu ausschließlich solche verwendet, die konstant auf n -Zylindern oder allgemein stetig sind. Insbesondere Zylinderfunktionen, die nur Werte auf einem Gitter $\lambda\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ annehmen, sind gut handhabbare Objekte, da sich die Strömung für diskrete Zeitschritte λ selbst als Markovshift beschreiben lässt, sodass man für das Studium von Basistransformation und Strömung eng verwandte Methoden verwenden kann. Da diese Zylinderfunktionen dicht in den stetigen Funktionen liegen, lassen sich durch Approximationsargumente viele Resultate auf allgemeine stetige Dachfunktionen erweitern.

Erste grundlegende Eigenschaften der Ausströmrates sind der Gegenstand von [Kapitel 2](#). Von besonderer Bedeutung für den Zusammenhang zwischen Eigenschaften der Basis und der Dachfunktion ist die

¹ Siehe [Abbildung 1](#) auf Seite [11](#).

Erkenntnis, dass bei beschränkter Dachfunktion die Ausströmrates nur von der Projektion des Lochs auf die Basis abhängt und man sich folglich bei der Auswahl von Löchern auf Mengen in der Basis beschränken kann (Satz 2.13 (D)). Dementsprechend wird die Ausströmrates durch ein Loch $\bar{A} \subset \bar{X}$ mit Projektion $A := \pi_1(\bar{A}) \subset X$ in der Basis unter einer Dachfunktion φ mit $\rho(A, \varphi)$ bezeichnet. Zwar muss im Allgemeinen zwischen oberer und unterer Ausströmrates unterschieden werden, und wie Beispiel 2.9 zeigt, ist die Existenz der Ausströmrates durch A bezüglich der Basistransformation auch in Kombination mit einer beschränkten Dachfunktion noch kein hinreichendes Kriterium für das Zusammenfallen von oberer und unterer Ausströmrates, jedoch tritt dieses Problem in der wichtigen Situation eines zylinderartigen Lochs und stetiger Dachfunktion nicht auf. Obwohl Beschränktheit der Dachfunktion kein hinreichendes Kriterium für die Existenz der Ausströmrates ist, werden in dieser Arbeit ausschließlich beschränkte Dachfunktionen betrachtet.² Zum einen wird dadurch die erwähnte Charakterisierung des Lochs durch seine Projektion ermöglicht, zum anderen erzwingt dies, dass die Ausströmrates aus einem Zusammenspiel von Dach und Basis erwächst, während bei unbeschränkten Dachfunktionen Situationen auftreten können, bei denen die Ausströmrates ausschließlich von der Dachfunktion abhängt. Man denke an ein Loch der Gestalt $X \times [0, \varepsilon] \subset \bar{X}$, also einen kleinen Streifen am Boden: Bei beschränkter Dachfunktion wäre die Ausströmrates unendlich, da in endlicher Zeit die gesamte Masse verschwände, während bei unbeschränkter Dachfunktion durchaus andere Ausströmrates möglich wären, jedoch die Dynamik der Basis offenkundig keinerlei Einfluss hätte.

Die Ausströmrates erfüllt eine Monotonieeigenschaft (Satz 2.6 (A)) bezüglich des Lochs:

$$A \subset B \Rightarrow \rho(A, \varphi) \leq \rho(B, \varphi).$$

Es ist klar, dass durch ein (im Sinne der Inklusion von Mengen) größeres Loch die Masse schneller ausströmt. Diese banale Beobachtung darf jedoch nicht zu dem Gedanken verleiten, dass es einen ähnlich einfach gelagerten Zusammenhang zwischen dem Maß eines Lochs und seiner Ausströmrates gibt. In der Tat ist es gerade Gegenstand der Arbeit von Bunimovich und Yurchenko [BY2011], aufzuzeigen, dass nicht das Maß eines Lochs, sondern vielmehr dynamische Aspekte wie im Loch enthal-

² Wenn die Basistransformation durch einen Markovshift über einem endlichen Alphabet gegeben ist, ist der Basisraum kompakt und somit ist jede stetige Dachfunktion sowohl beschränkt als auch von Null weg beschränkt.

tene periodische Punkte die Ausströmrates bestimmen. Auch bezüglich der Dachfunktion gibt es eine Monotonieeigenschaft (Satz 2.13 (A)):

$$\varphi \leq \psi \Rightarrow \rho(A, \varphi) \geq \rho(A, \psi).$$

Diese erklärt sich dadurch, dass größere Dachfunktionen den Weg, den ein Punkt zurücklegen muss, bevor er das Loch erreicht, verlängern.

Mit der Berechnung der Ausströmrates befasst sich Kapitel 3. Das fundamentale Hilfsmittel ist ein Approximationsresultat, das unabhängig von der Natur der Basistransformation ist.³

Resultat (Satz 3.1). *Man betrachte Halbströmungen über einer Basistransformation $\theta : X \rightarrow X$ eines metrischen Raums X . Es sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Dachfunktionen $\varphi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine Dachfunktion $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Desweiteren sei ein Loch $A \subset X$ fixiert. Dann gilt, sofern die Ausströmrates existieren:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A, \varphi_n) = \rho(A, \varphi).$$

Dieses Resultat sowie eine explizite Abschätzung der Abweichung (Korollar 3.3) erlauben es, sich im Fall eines Markovshifts als Basistransformation und eines als eine endliche Vereinigung von Zylinder-mengen darstellbaren Lochs auf Zylinderfunktionen als Dachfunktion zu beschränken und dennoch Resultate für allgemeine stetige Dachfunktionen zu erhalten. Um die Ausströmrates bezüglich einer Zylinderfunktion zu berechnen, wird zuerst eine an die Lochgröße angepasste Matrixbeschreibung des Transferoperators für Markovshifts angegeben und in einem zweiten Schritt diese Darstellung auf die Strömung erweitert. Ein derartiges matrixbasiertes Verfahren leidet zwar darunter, dass die Matrixgröße exponentiell mit der Zylinderlänge des Lochs anwächst, hat jedoch den Vorteil, dass sich die Dachfunktion leicht in der Matrix kodieren lässt.

Sowohl die bereits erwähnte Monotonieeigenschaft der Ausströmrates in Abhängigkeit von der Dachfunktion, als auch die Skalierungseigenschaft (Satz 2.13 (B))

$$\rho(A, \lambda\varphi) = \frac{1}{\lambda} \rho(A, \varphi)$$

³ Alle im Folgenden als *Resultat* markierten Aussagen sind solcherart formuliert, dass die relevante Aussage des zugrundeliegenden Theorems oder Satzes prägnant wiedergegeben wird, aber gegebenenfalls technische Details der Voraussetzungen nur verkürzt formuliert werden. Die vollständige Darstellung des Resultats findet sich jeweils unter der angegebenen Nummer.

deuten bereits darauf hin, dass die reziproke Ausströmrate ρ^{-1} ein interessantes Objekt für die Untersuchung der Abhängigkeit von der Dachfunktion ist, da sie „linearer“ ist. Dieser Gedankengang findet seine Bestätigung in [Kapitel 4](#).

Resultat ([Theorem 4.2](#) & [Korollar 4.3](#)). *Die Basistransformation $\theta : X \rightarrow X$ sei ein Markovshift. Dann ist die reziproke Ausströmrate $\rho^{-1}(A, \cdot)$, aufgefasst als Funktion der Dachfunktion bezüglich eines festen Lochs $A \subset X$, konvex und sublinear.*

Die Ausströmrate ρ ist dagegen im Allgemeinen weder konvex noch konkav. Man erhält nur die wesentlich schwächere Eigenschaft der Quasikonkavität ([Korollar 4.5](#)).

Dieses Theorem wird in [Kapitel 4](#) auf zwei verschiedene Arten bewiesen. Die erste Variante zeigt die Aussage für Zylinderfunktionen und nutzt anschließend ein Approximationsargument. Zum Beweis der Aussage für Zylinderfunktionen wird dabei die in [Kapitel 3](#) hergeleitete Matrixdarstellung genutzt und die sich daraus ergebende Charakterisierung der Ausströmrate über die maximale Nullstelle eines als Determinante aus dieser Matrix gewonnenen Polynoms verwendet, um zu einer geometrischen Interpretation der Ausströmrate zu gelangen. Anstatt die Funktionswerte der Dachfunktion mittels unterschiedlicher Exponenten der Unbestimmten im Polynom zu kodieren, erhält jeder Funktionswert der Dachfunktion eine eigene Unbestimmte. Das neue Polynom in mehreren Unbestimmten kann dann im Sinne der Amöbentheorie [[GKZ1994](#)] betrachtet werden, denn es sind gerade die Logarithmen der Nullstellen, die für die Ausströmrate von Interesse sind. Es stellt sich heraus, dass die Ausströmrate als ein extremer Schnittpunkt der Amöbe des Polynoms mit einer die Dachfunktion beschreibenden Geraden beschrieben werden kann. Ein allgemeines Ergebnis über Konvexität bei Amöben liefert dann die gewünschte Konvexität der reziproken Ausströmrate.

Die zweite Beweisvariante ([Satz 4.16](#)) ignoriert den Matrixansatz und macht stattdessen Gebrauch von einer Charakterisierung der Ausströmrate als induziertem Druck im Sinne von Jaerisch, Kesseböhmer und Lamei [[JKL2014](#)] ([Satz 4.14](#)). Eine derartige Formulierung erlaubt zwar keine einfache Berechnung expliziter Werte für die Ausströmrate, ermöglicht jedoch das Ausdehnen des Konvexitätsresultats auf allgemeinere Situationen als die mit dem Amöbenansatz behandelten endlichen Markovshifts mit stetiger Dachfunktion.

Nachdem in [Kapitel 4](#) die Sublinearität der reziproken Ausströmrate gezeigt wurde, beschäftigt sich [Kapitel 5](#) mit expliziten Ergebnissen, die

diese Sublinearität in zwei Spezialfällen näher beschreiben. Im ersten Abschnitt wird die Frage untersucht, wie sich die reziproke Ausströmrates verhält, wenn man für ein fixes zylinderartiges Loch und eine Zylinderfunktion als Dach den Funktionswert auf einem fest gewählten Zylinder gegen unendlich streben lässt. Die sich ergebende Abhängigkeit zwischen ρ^{-1} und dem Funktionswert auf dem Zylinder nähert sich dabei einer Geraden an, deren Steigung und Achsenabschnitt explizit berechnet werden (Satz 5.11). Anstelle von unendlich groß werdenden Funktionswerten wird im zweiten Abschnitt die Situation betrachtet, dass die Dachfunktion nur geringfügig variiert wird. Wenn man fordert, dass die Dachfunktion für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ auf n -Zylindern konstant ist, also aus dem Vektorraum, der die Indikatorfunktionen der n -Zylinder als Basis hat, stammt, kann man vom Gradienten der (reziproken) Ausströmrates sprechen. Für Funktionen, die nur geringfügig von einer konstanten Funktion abweichen, ist durch das Skalarprodukt $\langle \nabla \rho^{-1}(\mathbb{1}), \vec{\varphi} \rangle$ eine erste Näherung für $\rho^{-1}(\vec{\varphi})$ gegeben. Sofern $n = 1$ und der zugrundeliegende Markovshift ein Bernoullishift ist, erhält man den Zusammenhang (Satz 5.12)

$$\nabla \rho^{-1}(\mathbb{1}) = \rho^{-1}(A) \cdot \vec{v},$$

wobei \vec{v} der eindeutige stochastische Linkseigenvektor der Übergangsmatrix des offenen Systems ist, was bedeutet, dass die Approximation $\langle \nabla \rho^{-1}(\mathbb{1}), \vec{\varphi} \rangle$ dem Integral von φ bezüglich des bedingt invarianten Maßes geteilt durch die Ausströmrates in der Basis entspricht.

Zwar wurde bereits erwähnt, dass es keine direkte Abhängigkeit zwischen dem Maß eines Lochs und der zugehörigen Ausströmrates gibt, jedoch kann bei geeigneter Wahl des Lochs dennoch eine Verbindung gefunden werden. Sofern die Basistransformation auf einem metrischen Raum X erklärt ist, betrachtet man hierzu die um einen Punkt $x \in X$ zentrierten Kugeln $B_r(x)$ als Löcher und definiert die lokale Ausströmrates im Punkt x als

$$\rho(x, \varphi) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho(B_r(x), \varphi)}{\mu(B_r(x))},$$

sofern dieser Grenzwert existiert. Man beachte, dass bei Markovshifts die Umgebungen B_r Zylindermengen entsprechen. In Kapitel 6 wird ein Zusammenhang zwischen der lokalen Ausströmrates in der Basis (oder äquivalent für die Dachfunktion $\mathbb{1}$) und jener bezüglich einer Dachfunktion φ hergeleitet.

Resultat (Theorem 6.5). *Die Basistransformation sei ein ergodischer Endomorphismus eines metrischen Raums. Es sei $x_0 \in X$ ein Punkt, für den die*

lokale Ausströmrates bezüglich der Basis existiert. Sofern die Konvergenz im Ergodensatz hinreichend schnell ist, gilt

$$\rho(x_0, \varphi) = \frac{\rho(x_0, \mathbb{1})}{\mu(\varphi)}.$$

Dieses Theorem erfordert nicht zwingend eine stetige Dachfunktion oder einen Markovshift als Basistransformation, jedoch ist es insbesondere in diesem Fall gültig (Korollar 6.8), da für Markovshifts bekannt ist, dass die geforderte Konvergenzgeschwindigkeit vorliegt [KT1961, BKR1962], was das Ergebnis für Zylinderfunktionen impliziert und per Approximation schließlich das Resultat für stetige Dachfunktionen gibt.

Das Theorem besagt, dass für die lokale Ausströmrates in einem Punkt ausschließlich die lokale Ausströmrates bezüglich der Basis sowie das Integral der Dachfunktion relevant sind. Es ist also keine lokale, sondern nur eine globale Eigenschaft der Dachfunktion in der lokalen Ausströmrates enthalten. Dennoch stellt sich die folgende, Umkehrproblem genannte, Frage.

Problem (Problem 7.1). Lässt sich – bei vollständiger Kenntnis der Eigenschaften der Basis – die Dachfunktion aus den Ausströmrates bezüglich der Strömung rekonstruieren?

Zwar ist offenkundig die lokale Ausströmrates allein kein taugliches Mittel um zu einer Lösung zu kommen und auch allgemein wird man keine vollständige Rekonstruktion der Dachfunktion erwarten können, da die Ausströmrates invariant unter Veränderungen der Dachfunktion durch Addition eines Korandes ist (Satz 2.13 (c)), jedoch tragen die einzelnen Folgenglieder, die bei der Grenzwertbildung für die lokale Ausströmrates auftreten, zusätzliche Informationen. Letztendlich lässt sich das Umkehrproblem teilweise lösen, denn für Zylinderfunktionen über einem Markovshift kann man die Orbitlängen periodischer Punkte aus den Ausströmrates zurückgewinnen.

Resultat (Theorem 7.20). Es sei $x = (x_1, x_2, \dots)$ ein Punkt mit Primperiode p . Es sei $\rho(x, \mathbb{1})$ die lokale Ausströmrates in x bezüglich der Basis, und es sei $A_\nu := [x_1, x_2, \dots, x_{\nu p}]$. Dann gilt für Zylinderfunktionen φ :

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\frac{\rho(A_\nu, \varphi)}{\mu(A_\nu)} - \rho(x, \varphi)}{\frac{\rho(A_\nu, \mathbb{1})}{\mu(A_\nu)} - \rho(x, \mathbb{1})} = \frac{1}{\mu(\varphi)^2} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{p-1} \varphi \circ \theta^i(x)}{p}.$$

Die Grundlage dieses Theorems ist eine alternative Beschreibung des Transferoperators für Markovshifts mit Loch, die auf der Arbeit von Cristadoro, Knight und Degli Esposti [CKDE2013] basiert. Im Gegensatz

zu [Kapitel 3](#), wo eine Darstellung des Transferoperators für allgemeine zylinderartige Löcher und Dachfunktionen angestrebt wurde, zielt die Formulierung in [Kapitel 7](#) darauf ab, möglichst effektiv die Ausströmraten bei festbleibender Dachfunktion für Löcher von Zylindergestalt auch mit großen Zylinderlängen berechnen zu können. Während der Ansatz aus [Kapitel 3](#) zu einem exponentiellen Anwachsen der Matrixgröße in Abhängigkeit von der Zylinderlänge des Lochs führt, jedoch gleichzeitig auch erlaubt, dass die Dachfunktion eine Zylinderfunktion auf Zylindern dieser Länge ist, reduziert der alternative Ansatz dies auf ein lineares Wachstum, wobei jedoch vorausgesetzt werden muss, dass die Dachfunktion auf n -Zylindern für ein zuvor festzulegendes n konstant ist – andernfalls erhielte man wieder exponentielles Wachstum, was nicht durch das Loch, sondern die Dachfunktion erzwungen würde. Wenn man nun eine Folge von Löchern der Gestalt A_ν wie im Theorem untersucht, erhält man eine zugehörige Folge von leicht zu ermittelnden Polynomen, deren Nullstellen die Ausströmraten bestimmen. Unter der Voraussetzung, dass die lokale Ausströmraten existiert und endlich ist, weiß man, dass sich die Folge der Ausströmraten $\rho(A_\nu, \varphi)$ für $\nu \rightarrow \infty$ in erster Näherung wie $\rho(x, \varphi) \cdot \mu(A_\nu)$ verhält. Da die Ausströmraten bei dieser Wahl der Polynome dem Logarithmus der betragsmäßig minimalen Nullstelle entspricht, ergibt sich auch ein entsprechender Zusammenhang für die Folge dieser Nullstellen. Cristadoro, Knight und Degli Esposti nutzen dies, um die Nullstelle als formale Potenzreihe in $\mu(A_\nu)$ zu schreiben und die Koeffizienten erster und zweiter Ordnung zu bestimmen, wobei sie sich für die Bestimmung des Koeffizienten zweiter Ordnung auf die Betrachtung eines nichtperiodischen Punkts beschränken. In [Abschnitt 7.1](#) wird das Verfahren von Cristadoro et al. auf diskretisierte Halbströmungen unter einer Funktion erweitert und ein explizites Konvergenzresultat bewiesen.

Resultat (Theorem 7.16). *Die Dachfunktion φ sei λ -arithmetisch. Ferner sei $k \in \mathbb{N}$, $\mu_\nu := \mu(A_\nu)$, und es seien $s_i(v)$ für $i = 1, \dots, k$ wie in [Fakt 7.10](#) auf Seite 97. Dann gilt für $z_\nu := e^{\rho(A_\nu, \lambda^{-1}\varphi)}$, dass*

$$\left| z_\nu - \left(1 + s_1 \mu_\nu + s_2 \mu_\nu^2 + \dots + s_k \mu_\nu^k \right) \right| = o(\mu_\nu^k).$$

Dieses Resultat, zusammen mit der konkreten Bestimmung der Koeffizienten s_1 und s_2 , führt zu einer expliziten Formel ([Satz 7.18](#)) für die lokale Ausströmraten in periodischen Punkten, sowie zur zuvor erwähnten partiellen Lösung des Umkehrproblems.

In diesem Kapitel werden die verwendeten Bezeichnungen erläutert und für diese Arbeit relevante grundlegende Konzepte, primär zu den Themen Strömungen und Markovshifts, definiert. Eine gute Darstellung dieser Themen findet sich unter anderem bei Cornfeld, Fomin und Sinai [CFS1982]. Bezeichnungen und grundlegende Resultate zu Matrizen, soweit sie für diese Arbeit relevant sind, finden sich in [Anhang A](#).

Wenn im Folgenden die reellen Zahlen \mathbb{R} verwendet werden, so sind diese immer als mit der Borelschen σ -Algebra und dem Lebesgue-Maß ausgestattet zu verstehen. Mit $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ($\mathbb{R}_{> 0}$) ist die Teilmenge der nichtnegativen (positiven) reellen Zahlen gemeint. Die natürlichen Zahlen \mathbb{N} werden als die Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ verstanden und mit \mathbb{N}_0 wird die Menge $\mathbb{N} \cup \{0\}$ bezeichnet. Für Mengen $A \subset X$ wird die Indikatorfunktion von A mit $\mathbb{1}_A$ bezeichnet und für die Indikatorfunktion des Gesamtraums wird die verkürzte Bezeichnung $\mathbb{1} := \mathbb{1}_X$ gebraucht. Wenn Mengen der Gestalt $\{x \in X \mid f(x) > g(x)\}$ verwendet werden, wird zur Verkürzung der Notation mitunter der Parameter x ausgelassen und die Menge als $\{x \in X \mid f > g\}$ notiert.

Definition 1.1. Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Eine messbare Abbildung $\theta : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **ENDOMORPHISMUS**, wenn θ maßerhaltend ist, also $\mu(\theta^{-1}(A)) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt. Falls der Endomorphismus θ bijektiv und die Umkehrabbildung θ^{-1} ebenfalls ein Endomorphismus ist, wird θ auch **ISOMORPHISMUS** genannt.

Endomorphismus

Isomorphismus

Wenn $\theta : X \rightarrow X$ eine Abbildung, $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x \in X$ ein beliebiges Element ist, werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$n \in \mathbb{N} : \quad S_n \varphi(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ \theta^k(x) \quad (1)$$

$$t \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \quad N_t^\varphi(x) := \min \{n \in \mathbb{N}_0 \mid S_n \varphi(x) > t\}$$

$$A \subset X : \quad N_A(x) := \min \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \theta^n x \in A\}$$

Sofern aus dem Kontext eindeutig hervorgeht, welche Funktion φ gemeint ist, wird mitunter $S_n(x)$ und $N_t(x)$ geschrieben. Bei Ausdrücken der Gestalt $S_{N_t(x)} \varphi(x)$ wird die Notation zu $S_{N_t} \varphi(x)$ oder $S_{N_t}(x)$ verkürzt.

Halbströmung

Definition 1.2. Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Eine HALBSTRÖMUNG ist eine Familie $\Phi := \{\Phi_t | t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ von Endomorphismen des Maßraums (X, \mathcal{A}, μ) mit der Eigenschaft

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{s+t}.$$

Strömung

Definition 1.3. Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Eine STRÖMUNG ist eine Familie $\Phi := \{\Phi_t | t \in \mathbb{R}\}$ von Endomorphismen des Maßraums (X, \mathcal{A}, μ) mit der Eigenschaft

$$\forall s, t \in \mathbb{R} : \Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{s+t}.$$

Die Bezeichnung *Strömung* findet sich unter anderem in den Arbeiten von Hopf [Hop1937], Jacobs [Jac1960] und Krengel [Kre1968], aber in der deutschsprachigen Literatur wird mitunter auch der Begriff *Fluss* verwendet, beispielsweise bei Denker [Den2005]. Im Folgenden wird das Konzept der (Halb-)Strömung unter einer Funktion definiert, welches im Englischen als *special flow* oder *suspension flow* bezeichnet wird.

Definition 1.4. Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum, und es sei θ ein Endomorphismus von (X, \mathcal{A}, μ) . Überdies sei $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit $\inf_{x \in X} \varphi(x) > 0$. Ausgehend vom Produkt $(X, \mathcal{A}, \mu) \times (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ des Maßraums mit der reellen Geraden definiert man einen neuen Maßraum $(\bar{X}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ als Teil dieses Produkts mittels

$$\bar{X} := \{(x, s) \in X \times \mathbb{R} | 0 \leq s < \varphi(x)\}$$

und $\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu}$ als den entsprechenden Einschränkungen der Produkt- σ -Algebra beziehungsweise des Produktmaßes. Falls μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist und $\int \varphi d\mu < \infty$, kann es sinnvoll sein, $\bar{\mu}$ durch das skalierte Maß $\bar{\mu}/\mu(\varphi)$ zu ersetzen, um wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß zu erhalten. Auf dem Raum $(\bar{X}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ lässt sich eine Halbströmung Φ wie folgt definieren:

$$\Phi_t(x, s) := \begin{cases} (x, s+t) & , 0 \leq t < \varphi(x) - s \\ \left(\theta^{N_{s+t}(x)-1}(x), s+t - S_{N_{s+t}(x)-1}\varphi(x)\right) & , \varphi(x) - s \leq t. \end{cases}$$

(Halb-)Strömung
unter einer
Funktion
Dachfunktion

Die Halbströmung Φ heißt HALBSTRÖMUNG UNTER DER FUNKTION φ über der Basistransformation θ . Die Funktion φ heißt DACHFUNKTION.

Falls θ ein Automorphismus ist, wird Φ zu einer STRÖMUNG, indem man für $t > 0$ die Umkehrabbildung von Φ_t benutzt, um Φ_{-t} zu definieren.

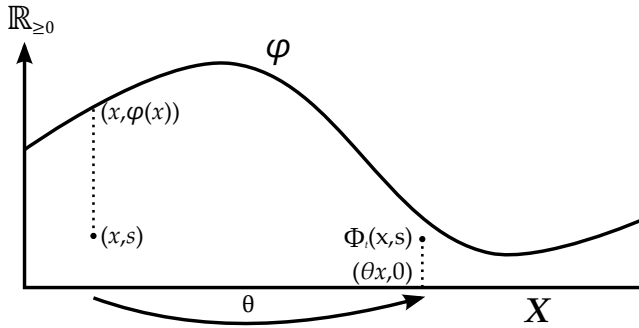


Abbildung 1: Naive Illustration einer Strömung unter einer Funktion

Bemerkung 1.5. Es ist bereits in der Definition einer (Halb-)Strömung Φ enthalten, dass alle Φ_t maßerhaltend sein müssen. Ein Beweis dafür, dass dies bei einer (Halb-)Strömung unter einer Funktion der Fall ist, findet sich unter anderem bei Jacobs [Jac1960, S. 89f].

Mit π_1 und π_2 werden die Projektionen von \bar{X} auf die erste beziehungsweise zweite Komponente bezeichnet.

Von besonderer Bedeutung in dieser Arbeit sind Basistransformationen θ , die die Gestalt von endlichen, irreduziblen Markovshifts haben. Ein Markovshift ist eine spezielle Art von Schiebeabbildung (Shift).

Definition 1.6. Es sei S eine endliche oder abzählbare Menge, versehen mit der diskreten Topologie. Der Raum $S^{\mathbb{N}}$, versehen mit der Produkttopologie, wird mittels der Schiebeabbildung

$$\theta : S^{\mathbb{N}} \rightarrow S^{\mathbb{N}}, \quad (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (x_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}$$

zu einem topologischen dynamischen System. Das System $(S^{\mathbb{N}}, \theta)$ heißt (EINSEITIGER) SHIFT. Die Menge S wird als das ALPHABET des Shifts bezeichnet.

(einseitiger) Shift
Alphabet
Zylindermenge

Die Topologie auf $S^{\mathbb{N}}$ wird von den ZYLINDERMENGEN

$$[a_1, \dots, a_n] := \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}} \mid \forall 1 \leq i \leq n : x_i = a_i \right\}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ erzeugt und θ ist stetig bezüglich dieser Topologie. Die von den Zylindermengen erzeugte Topologie stimmt mit der von der Metrik

$$d : S^{\mathbb{N}} \times S^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto e^{-\beta|x \wedge y|}$$

für ein beliebiges $\beta > 0$ erzeugten Topologie überein, wobei

$$|x \wedge y| := \max \{n \in \mathbb{N}_0 \mid \forall 1 \leq i \leq n : x_i = y_i\}.$$

n-Zylinder Zylindermengen der Form $[a_1, \dots, a_n]$ werden als *n*-ZYLINDER oder Zylinder der Länge *n* bezeichnet. Man beachte, dass *n*-Zylinder und offene Kugeln bezüglich der Metrik *d* einander entsprechen, da

$$[a_1, \dots, a_n] = B_{e^{-\beta(n-\varepsilon)}}(x)$$

für jedes $x \in [a_1, \dots, a_n]$ und $0 < \varepsilon < 1$, wobei $B_{e^{-\beta(n-\varepsilon)}}(x)$ die offene Kugel vom Radius $e^{-\beta(n-\varepsilon)}$ um x bezeichnet. Die Menge aller *n*-Zylinder erhält die Bezeichnung C_n .

Teilshift Es sei $M \in \{0, 1\}^{S \times S}$ eine Matrix. Durch M wird ein TEILSHIFT von $(S^{\mathbb{N}}, \theta)$ definiert, indem man θ auf

$$\Sigma_M := S_M^{\mathbb{N}} := \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \forall i \in \mathbb{N} : m_{x_i, x_{i+1}} = 1\} \subset S^{\mathbb{N}}$$

irreduzibel einschränkt. Der Teilshift heißt IRREDUZIBEL, wenn die Matrix M irreduzibel ist.

Man bezeichnet

$$\Sigma_M^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in S^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : m_{x_i, x_{i+1}} = 1\} \subset S^n$$

zulässige Wörter als die Menge der ZULÄSSIGEN WÖRTER der Länge *n* und

$$\Sigma_M^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_M^n$$

als die Menge der zulässigen Wörter beliebiger Länge. Die Menge der *n*-Zylinder C_n wird für einen Teilshift auf jene *n*-Zylinder eingeschränkt, die von einem zulässigen Wort abstammen; es gibt also eine Entsprechung zwischen zulässigen Wörtern der Länge *n* und *n*-Zylindern.

Fakt 1.7. Wenn das Alphabet des Teilshifts endlich ist, ist der Raum $S_M^{\mathbb{N}}$ kompakt bezüglich der von *d* induzierten Teilraumtopologie.

Markovshift
Übergangsmatrix

Definition 1.8. Ein MARKOVSHIFT auf einem endlichen Alphabet S wird durch eine irreduzible, zeilenstochastische ÜBERGANGSMATRIX $P \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{S \times S}$ bestimmt. Die Einträge $p_{s,t}$ der Übergangsmatrix werden Übergangswahrscheinlichkeiten (von *s* nach *t*) genannt. Dem Markovshift liegt ein topologisches dynamisches System zu Grunde, das als Teilshift θ über dem Alphabet S durch jene Matrix M gegeben ist, deren Einträge $m_{i,j} = 1$ für $p_{i,j} > 0$ und $m_{i,j} = 0$ sonst sind. Nach dem Satz von Perron-Frobenius (Satz A.4) gibt es einen eindeutig bestimmten positiven Wahrscheinlichkeitsvektor $\pi \in \mathbb{R}^S$ mit $\pi P = \pi$. Dabei bedeutet WAHRSCHEINLICHKEITSVEKTOR, dass die Komponenten des Vektors nichtnegativ sind und sich zu Eins summieren.. Der Raum

Wahrscheinlichkeitsvektor

$$\Sigma_P := S_P^{\mathbb{N}} := S_M^{\mathbb{N}}$$

mit seiner Borelschen σ -Algebra \mathcal{B} wird durch

$$\mu([a_1, \dots, a_n]) := \pi_{a_1} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} p_{a_i, a_{i+1}}$$

zu einem Wahrscheinlichkeitsraum und die Schiebeabbildung θ ist maß-erhaltend bezüglich μ . Analog zur Bezeichnung $S_P^{\mathbb{N}}$ setzt man, um die Hilfsmatrix M in der Notation zu vermeiden, auch $\Sigma_P^n := \Sigma_M^n$ und $\Sigma_P^* := \Sigma_M^*$.

Ein **BERNOULLISHIFT** ist ein Spezialfall eines Markovshifts, bei dem alle Zeilen der Übergangsmatrix P gleich sind (und folglich auch identisch mit dem Vektor π).

Bernoullishift

Bemerkung 1.9. Mitunter wird nur von einem Markovshift (X, θ) gesprochen werden. Diese Formulierung impliziert, dass es ein Alphabet S und eine Übergangsmatrix $P \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{S \times S}$ gibt, sodass $X = S_P^{\mathbb{N}}$ zusammen mit der Schiebeabbildung $\theta : X \rightarrow X$ ein Markovshift im Sinne von [Definition 1.8](#) ist.

Beispiel 1.10. Die einfachste Variante eines Bernoullishifts ist der Shift auf dem Alphabet $S := \{0, 1\}$ mit zwei Symbolen und überall gleichen Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Da $\pi = (1/2, 1/2)$, hängt das Maß einer Zylindermenge $[a_1, \dots, a_m]$ in diesem Fall nur von der Länge des Zylinders ab und ist $(1/2)^m$.

Dieser Bernoullishift auf zwei Symbolen ist auf Grund seiner Einfachheit praktisch, um schnell Beispiele rechnen zu können, jedoch führt gerade diese Einfachheit dazu, dass in den Ergebnissen Symmetrien auftreten können, die im allgemeinen Fall nicht vorhanden sind, weshalb man vorsichtig sein muss, wenn man aus numerischen Experimenten Vermutungen über allgemeine Zusammenhänge ableiten möchte.

Bemerkung 1.11. Wenn das Alphabet explizit durch $\{0, 1\}$ gegeben ist, wird bei der Angabe konkreter Zylinder auf die Kommata verzichtet, wenn dies geboten ist, um die Notation kompakt zu halten. Dies bedeutet, dass beispielsweise ein 4-Zylinder wie $[1, 0, 1, 1]$ auch verkürzt als $[1011]$ bezeichnet wird.

Beispiel 1.12. Um die Symmetrien, die in [Beispiel 1.10](#) auftreten, zu vermeiden, ist es sinnvoll, bei numerischen Experimenten auch einen etwas

allgemeineren Fall eines Markovshifts zu betrachten. Um den Berechnungsaufwand nicht zu sehr zu erhöhen, bleibt das Alphabet $S := \{0, 1\}$ auf zwei Symbole beschränkt, jedoch wird die Übergangsmatrix etwas weniger gleichförmig als

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

gewählt. Der Wahrscheinlichkeitsvektor π ist in dieser Situation

$$\pi = \left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11} \right).$$

Markovshifts stellen eine Möglichkeit dar, gut handhabbare Basistransformationen für Halbströmungen unter einer Funktion zu erhalten. Gut handhabbare Dachfunktionen sind insbesondere solche, die konstant auf n -Zylindern sind.

Definition 1.13. Es sei C_n die Menge der n -Zylinder eines Markovshifts (X, θ) . Dann bezeichnet

$$Z_n := \{ \varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall C \in C_n : \varphi \text{ ist konstant auf } C \}$$

die Menge der auf n -Zylindern konstanten Funktionen. Eine Funktion $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ZYLINDERFUNKTION, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\varphi \in Z_n$. Eine Zylinderfunktion φ heißt ARITHMETISCH, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass φ nur Werte auf dem Gitter $\lambda\mathbb{Z}$ annimmt; φ wird dann auch λ -arithmetische Zylinderfunktion genannt.

Zylinderfunktion
arithmetische
Zylinderfunktion

Betrachtet man eine Halbströmung über einem Markovshift (X, θ) unter einer λ -arithmetischen Dachfunktion der Form $\varphi = \lambda \cdot \sum_{C \in C_n} k_C \cdot \mathbb{1}_C$ mit $k_C \in \mathbb{N}$, so kann man den Raum \bar{X} in die Mengen $C \times [(k-1)\lambda, k\lambda)$ mit $0 < k \leq k_C$ und $C \in C_n$ zerlegen. Diese den Zylindern verwandten Mengen fasst man als

$$\bar{C}_n := \{ C \times [(k-1)\lambda, k\lambda) \mid 0 < k \leq k_C, C \in C_n \}$$

zusammen. Analog zu den Zylinderfunktionen definiert man

$$\bar{Z}_n := \{ f : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall \bar{C} \in \bar{C}_n : f \text{ ist konstant auf } \bar{C} \}.$$

Im Folgenden wird die in dieser Arbeit am häufigsten verwendete Situation beschrieben, sodass diese Standardannahmen später nicht häufig wiederholt werden müssen.

Annahme 1.14. Es sei (X, θ) mit $X := S_P^{\mathbb{N}}$ ein einseitiger Markovshift auf dem endlichen Alphabet S mit irreduzibler, zeilenstochastischer Übergangsmatrix P . Die Symbole μ, C_n, Z_n etc. werden wie in diesem Abschnitt definiert verwendet.

Annahme 1.15. Es sei die Basistransformation θ wie in [Annahme 1.14](#). Ferner sei $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine beschränkte und von Null weg beschränkte,⁴ messbare Funktion. Es sei Φ die Halbströmung unter der Dachfunktion φ . Die Symbole $\bar{\mu}, \bar{C}_n, \bar{Z}_n$ etc. werden wie in diesem Abschnitt definiert verwendet.

Bemerkung 1.16. Da der Raum $S_P^{\mathbb{N}}$ im Falle eines endlichen Alphabets kompakt ist, reicht es bei einer stetigen Dachfunktion φ aus, zu fordern, dass diese positiv ist, da dies bereits $0 < \inf \varphi \leq \sup \varphi < \infty$ impliziert.

Beispiel 1.17. Es sei (X, θ) der einseitige Markovshift aus [Beispiel 1.12](#). Zudem sei $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ die 1/8-arithmetische Dachfunktion

$$\varphi = \frac{1}{8} \cdot \left(2 \cdot \mathbb{1}_{[0,0]} + 1 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]} + 4 \cdot \mathbb{1}_{[1,0]} + 3 \cdot \mathbb{1}_{[1,1]} \right).$$

Dann lässt sich die Halbströmung Φ unter der Dachfunktion φ über der Basistransformation θ wie [Abbildung 2](#) dargestellt illustrieren. Die Kästchen, die den Elementen von \bar{C}_n entsprechen, sind hierbei entsprechend ihres Maßes skaliert.

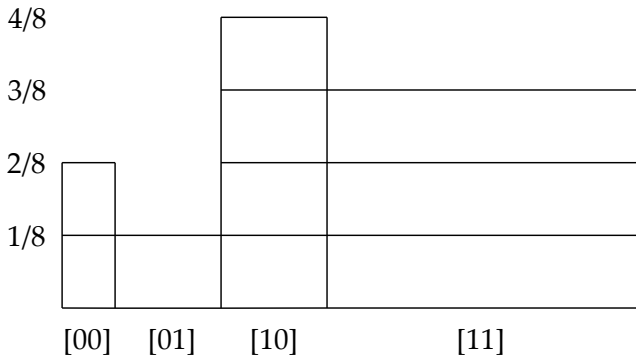


Abbildung 2: Zylindermengen einer Halbströmung mit Markovbasis und arithmetischer Dachfunktion

Definition 1.18. Es sei $\theta : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Endomorphismus. Das durch θ bestimmte dynamische System heißt **ERGODISCH**, falls jede *ergodisch*

⁴ Von Null weg beschränkt bedeutet, dass es ein $K > 0$ gibt, sodass $|\varphi(x)| \geq K$ für alle $x \in X$.

invariante Menge $A \in \mathcal{A}$ entweder Maß Null oder volles Maß besitzt, also

$$\forall A \in \mathcal{A}: \quad \theta^{-1}(A) = A \Rightarrow \mu(A) = 0 \text{ oder } \mu(A^c) = 0$$

gilt.

Da gemäß der in dieser Arbeit verwendeten Definition eines Markovshifts (1.8) die Übergangsmatrix als irreduzibel vorausgesetzt wird, ergibt sich folgende Aussage:

Fakt 1.19. *Markovshifts sind ergodisch.*

Satz 1.20 (Birkhoff'scher Ergodensatz [Den2005, Satz 93]). *Das durch einen Endomorphismus $\theta : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{A}, \mu)$ gegebene dynamische System sei ergodisch. Dann gilt für jede Funktion $\varphi \in L^1_\mu(X)$, dass μ -fast sicher*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \varphi = \int \varphi \, d\mu.$$

Hierbei bezeichnet

$$L^1_\mu(X) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } \int |f| \, d\mu < \infty \right\}$$

(oder verkürzt nur L^1 , sofern sich X und μ aus dem Kontext heraus eindeutig ergeben) den Raum der INTEGRIERBAREN FUNKTIONEN auf (X, \mathcal{A}, μ) .

*integrierbare
Funktionen*

DIE AUSSTRÖMRATE

In einem dynamischen System mit einem invarianten Maß verliert das Gesamtsystem bei wiederholter Anwendung der Transformation keine Masse. Wenn man jedoch eine Teilmenge des Raums als Loch deklariert und alle Punkte verwirft, deren Bahnen bis zu einem gewissen Zeitpunkt diese Teilmenge geschnitten haben, anschaulich also diese Bahnen durch das Loch das System verlassen lässt, dann wird im Allgemeinen das Maß der Menge derjenigen Punkte, deren Bahnen bis zu diesem Zeitpunkt das Loch noch nicht passiert haben, mit fortschreitender Zeit schrumpfen. Wenn die Vereinigung der Urbilder des Lochs den ganzen Raum (gegebenenfalls bis auf eine Nullmenge) beinhaltet, dann wird letztendlich fast sicher jeder Punkt das System durch das Loch verlassen, sodass das Maß der Menge der überlebenden Punkte gegen Null strebt. Sofern diese Abnahme im Wesentlichen exponentiell verläuft, kann man ermitteln, mit welcher Rate das Ausströmen aus dem System geschieht.

Zuerst wird ein diskretes dynamisches System betrachtet, das durch einen Endomorphismus θ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (X, \mathcal{A}, μ) gegeben ist, anschließend wird der Fall einer (Halb-)Strömung untersucht. Mit dem Ausdruck **LOCH** ist eine messbare Teilmenge $A \subset X$ gemeint, die die Bedingung

Loch bzgl. θ

$$\bigcup_{n \geq 0} \theta^{-n}(A) \stackrel{\mu}{=} X$$

erfüllt. Hierbei bedeutet die Schreibweise $M \stackrel{\mu}{=} N$, dass die Mengen M und N sich höchstens um eine Nullmenge bezüglich des Maßes μ unterscheiden. Falls das System ergodisch ist, so hat jede Menge positiven Maßes diese Eigenschaft [Walz000, Theorem 1.5 (iii)]. Das mit einem Loch versehene dynamische System wird auch als **OFFENES SYSTEM** bezeichnet.

μ -fast sichere Gleichheit

offenes System

Definition 2.1. Es sei $A \subset X$ ein Loch. Die **OBERE (UNTERE) AUSSTRÖMRATE** $\bar{\rho}$ ($\underline{\rho}$) durch das Loch A ist gegeben durch

Ausströmrate

$$\bar{\rho}(A) := \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu \left(\left\{ x \in X \mid \forall 0 \leq k \leq n : \theta^k(x) \notin A \right\} \right),$$

$$\underline{\rho}(A) := \liminf_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu \left(\left\{ x \in X \mid \forall 0 \leq k \leq n : \theta^k(x) \notin A \right\} \right).$$

Falls beide Werte übereinstimmen, wird $\rho(A) := \bar{\rho}(A) = \underline{\rho}(A)$ die AUSSTRÖMRATE (escape rate) des Lochs A genannt.

Bemerkung 2.2. Es kann anstelle von $\{x \in X | \forall 0 \leq k \leq n : \theta^k(x) \notin A\}$ auch die Menge $\{x \in X | \forall 0 \leq k < n : \theta^k(x) \notin A\} = \{x \in X | N_A(x) \geq n\}$ betrachtet werden, ohne dass sich Limes inferior oder Limes superior ändern. Ebenso kann man anstelle einer Folge natürlicher Zahlen $n \rightarrow \infty$ eine reelle Folge $t \rightarrow \infty$ verwenden und erhält dieselben Ergebnisse.

Der folgende Satz über einfache Eigenschaften der Ausströmrates findet sich beispielsweise bei [BY2011, Proposition 2.3.2].

Satz 2.3. *Es seien $A, B \subset X$ Löcher, für die die Ausströmrates $\rho(A)$ und $\rho(B)$ existieren. Dann gelten folgende Eigenschaften:*

- A. Wenn $A \subset B$, dann ist $\rho(A) \leq \rho(B)$.
- B. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\rho(A) = \rho(\theta^{-n}(A))$.
- C. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\rho(A) = \rho(\bigcup_{k=0}^n \theta^{-k}(A))$.

Loch bzgl. Φ

Für (Halb-)Strömungen Φ unter einer Funktion φ über der Basistransformation $\theta : X \rightarrow X$ lässt sich die Ausströmrates analog zu diskreten Systemen definieren, wobei vorausgesetzt werde, dass $(\bar{X}, \bar{\mu})$ ein endlicher Maßraum ist. Mit dem Ausdruck LOCH ist in diesem Fall eine messbare Teilmenge $\bar{A} \subset \bar{X}$ gemeint, die die Bedingung

$$\bigcup_{t \geq 0} \Phi_t^{-1}(\bar{A}) \stackrel{\bar{\mu}}{=} \bar{X}$$

erfüllt, und für die die Menge

$$\bigcup_{t \in [0, \tau]} \Phi_t^{-1}(\bar{A})$$

für jedes $\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ messbar ist. Letzteres ist beispielsweise dann der Fall, wenn die Menge \bar{A} „dick“ ist; hiermit ist gemeint, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass zu jedem $(x, s) \in \bar{A}$ ein $a \in [0, \varphi(x))$ mit $s \in [a, a + \varepsilon]$ existiert, für das $\{x\} \times [a, a + \varepsilon] \subset \bar{X}$ gilt.

Ausströmrates
(Strömung)

Definition 2.4. Es sei $\bar{A} \subset \bar{X}$ ein Loch. Die OBERE (UNTERE) AUSSTRÖMRATE $\bar{\rho}$ ($\underline{\rho}$) durch das Loch \bar{A} ist gegeben durch

$$\bar{\rho}(\bar{A}, \varphi) := \limsup_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \bar{\mu}(\{(x, s) \in \bar{X} | \forall \tau \in [0, t] : \Phi_\tau(x, s) \notin \bar{A}\}),$$

$$\underline{\rho}(\bar{A}, \varphi) := \liminf_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \bar{\mu}(\{(x, s) \in \bar{X} | \forall \tau \in [0, t] : \Phi_\tau(x, s) \notin \bar{A}\}).$$

Falls beide Werte übereinstimmen, wird $\rho(\bar{A}, \varphi) := \bar{\rho}(\bar{A}, \varphi) = \underline{\rho}(\bar{A}, \varphi)$ die **AUSSTRÖMRATE** des Lochs A genannt.

Bemerkung 2.5. Die Ausströmrage ändert sich nicht, wenn das Maß $\bar{\mu}$ mit einem Faktor $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ skaliert wird. Bei Betrachtungen die Ausströmrage betreffend ist es daher nicht notwendig, das bei der Konstruktion einer Strömung unter einer Funktion entstehende Maß $\bar{\mu}$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß zu reskalieren.

[BY2011] enthält Betrachtungen zu der Frage, inwiefern die Ausströmrage für die Abbildung $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $x \mapsto 2x \bmod 1$ von Größe und Position des Lochs abhängt. Im Falle einer Strömung kann neben Position und Größe des Lochs auch die Dachfunktion variiert werden. Diese zusätzliche Abhängigkeit der Ausströmrage von der Dachfunktion kommt in der Notation $\rho(\bar{A}, \varphi)$ zum Ausdruck. Falls jedoch aus dem Kontext eindeutig hervorgeht, dass nur einer der beiden Parameter variiert wird, kann der Andere aus Gründen der Übersichtlichkeit ausgelassen werden.

Für (Halb-)Strömungen gilt ein Analogon von [Satz 2.3](#).

Satz 2.6. *Es seien $\bar{A}, \bar{B} \subset \bar{X}$ Löcher, für die die Ausströmraten $\rho(\bar{A})$ und $\rho(\bar{B})$ existieren. Dann gelten folgende Eigenschaften:*

- A. Wenn $\bar{A} \subset \bar{B}$, dann ist $\rho(\bar{A}) \leq \rho(\bar{B})$.
- B. Für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $\rho(\bar{A}) = \rho(\Phi_r^{-1}(\bar{A}))$.
- C. Für alle $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $\rho(\bar{A}) = \rho(\bigcup_{\tau \in [0, r]} \Phi_\tau^{-1}(\bar{A}))$.
- D. Wenn φ beschränkt und $\pi_1(\bar{A})$ messbar ist, dann gilt

$$\rho(\pi_1^{-1}(\pi_1(\bar{A}))) = \rho(\bar{A}).$$

Beweis. Eigenschaft **(A)** ergibt sich aus der Beobachtung, dass aus $\bar{A} \subset \bar{B}$ für alle $t > 0$ folgt, dass

$$\begin{aligned} & \bar{\mu}(\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, t] : \Phi_\tau(x, s) \notin \bar{A}\}) \\ & \geq \bar{\mu}(\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, t] : \Phi_\tau(x, s) \notin \bar{B}\}). \end{aligned}$$

Für **(B)** beachte man, dass

$$\begin{aligned} & \bar{\mu}(\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, t] : \Phi_\tau(x, s) \notin \bar{A}\}) \\ & = \bar{\mu}(\Phi_r^{-1}(\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, t] : \Phi_\tau(x, s) \notin \bar{A}\})) \\ & = \bar{\mu}(\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, t] : \Phi_{\tau+r}(x, s) \notin \bar{A}\}) \\ & = \bar{\mu}(\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, t] : \Phi_\tau(x, s) \notin \Phi_r^{-1}(\bar{A})\}). \end{aligned}$$

Eigenschaft (c) erhält man mittels

$$\begin{aligned}
\rho(\bar{A}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \bar{\mu} (\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, t] : \Phi_\tau(x, s) \notin \bar{A}\}) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t+r} \log \bar{\mu} (\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, t+r] : \\
&\hspace{15em} \Phi_\tau(x, s) \notin \bar{A}\}) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t+r} \log \bar{\mu} (\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, t] : \\
&\hspace{15em} \Phi_\tau(x, s) \notin \bigcup_{\tau' \in [0, r]} \Phi_{\tau'}^{-1}(\bar{A})\}) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \bar{\mu} (\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, t] : \\
&\hspace{15em} \Phi_\tau(x, s) \notin \bigcup_{\tau' \in [0, r]} \Phi_{\tau'}^{-1}(\bar{A})\}) \\
&= \rho\left(\bigcup_{\tau' \in [0, r]} \Phi_{\tau'}^{-1}(\bar{A})\right).
\end{aligned}$$

Bei (d) gilt

$$\rho\left(\pi_1^{-1}(\pi_1(\bar{A}))\right) \geq \rho(\bar{A})$$

wegen (a), und wegen der Beschränktheit von φ ergibt sich

$$\Phi_{\sup \varphi}^{-1}\left(\pi_1^{-1}(\pi_1(\bar{A}))\right) \subset \bigcup_{\tau \in [0, 2 \cdot \sup \varphi]} \Phi_\tau^{-1}(\bar{A}),$$

sodass die umgekehrte Ungleichung nun aus (a), (b) und (c) folgt. \square

Bemerkung 2.7. Sofern die Dachfunktion beschränkt ist, ist die Ausströmrates eines Lochs also im Wesentlichen von seiner Projektion auf die Basis bestimmt. Für messbare Mengen $A \subset X$ wird die Ausströmrates $\rho(\pi_1^{-1}(A), \varphi)$ daher zur Vereinfachung der Notation auch als $\rho(A, \varphi)$ geschrieben und A als das Loch bezeichnet.

Bemerkung 2.8. Im Fall eines Lochs vom Typ $\bar{A} = \pi_1^{-1}(A)$ kann man

$$\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, t] : \Phi_\tau(x, s) \notin \bar{A}\} = \{(x, s) \in \bar{X} \mid N_A(x) \geq N_{t+s}(x)\}$$

schreiben. Diese Formulierung wird sich in einigen Beweisen als hilfreich erweisen.

Beispiel 2.9. Es sei $A \subset X$ ein Loch, für das die Ausströmrates $\rho(A)$ in der Basis existiert und einen positiven reellen Wert hat. Es ist möglich, eine beschränkte messbare Dachfunktion φ anzugeben, sodass für die Strömung unter dieser Funktion die obere und untere Ausströmrates nicht zusammenfallen. Man wähle dazu eine beschränkte und von Null

weg beschränkte Folge reeller Zahlen $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathbb{N}}$, sodass die Folge $(\sum_{n=1}^m r_n / m)_{m \in \mathbb{N}}$ mehr als einen Häufungspunkt hat, und definiere

$$\varphi := \mathbb{1}_{A \cup (\cup_{n \geq 0} \theta^{-n}(A))^c} + \sum_{n \in \mathbb{N}} r_n \cdot \mathbb{1}_{\{N_A = n\}}.$$

Begründung. Es sei $R_m := \sum_{n=1}^m r_n$ für $m \in \mathbb{N}$, es sei α ein Häufungspunkt von $(\sum_{n=1}^m r_n / m)_{m \in \mathbb{N}}$, und es sei $m_k \nearrow \infty$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen, sodass die Folge $(R_{m_k} / m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ für $k \rightarrow \infty$ gegen α konvergiert. Es gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{R_{m_k}} \log \bar{\mu} \left(\left\{ (x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, R_{m_k}] : \Phi_\tau(x, s) \notin \pi^{-1}(A) \right\} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{R_{m_k}} \log \left(\sum_{n > m_k} r_n \cdot \mu(\{x \in X \mid N_A = n\}) \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{\frac{R_{m_k}}{m_k} \cdot m_k} \log \mu(\{x \in X \mid N_A > m_k\}) \\ &= \frac{1}{\alpha} \cdot \rho(A), \end{aligned}$$

und somit folgt aus der Existenz von mehr als einem Häufungspunkt α , dass obere und untere Ausströmrates der Strömung unter φ verschieden sind. Die Gleichheit $(*)$ gilt hierbei, da es gemäß der Definition der r_n eine Konstante $K > 0$ gibt, für die $0 < K^{-1} < r_n < K < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. \square

Beispiel 2.9 verdeutlicht, dass es im Allgemeinen für das Ermitteln der Existenz der Ausströmrates nicht ausreicht, eine beliebige Teilfolge zu untersuchen. Falls es jedoch eine Teilfolge „mit gleichen Schrittweiten“ gibt, die konvergiert, so kann daraus auf die Existenz der Ausströmrates geschlossen werden.

Lemma 2.10. *Es sei φ eine messbare Funktion von X nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$, die von Null weg beschränkt ist. Ferner sei $\bar{A} \subset \bar{X}$ ein Loch, für das es ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, sodass der Grenzwert*

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n\lambda} \log \bar{\mu}(\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, n\lambda] : \Phi_\tau(x, s) \notin \bar{A}\})$$

existiert. Dann existiert für jede Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty$ von positiven reellen Zahlen der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{t_k} \log \bar{\mu}(\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, t_k] : \Phi_\tau(x, s) \notin \bar{A}\})$$

und stimmt mit α überein. Folglich existiert die Ausströmrates $\rho(\bar{A}, \varphi)$ und hat den Wert α .

Beweis. Die Folge $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sei durch $m_k := \lceil t_k / \lambda \rceil$ definiert. Es gilt

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{m_k \lambda} \log \bar{\mu} \left(\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, (m_k - 1) \cdot \lambda] : \Phi_\tau(x, s) \notin \bar{A}\} \right) \\ & \leq -\frac{1}{t_k} \log \bar{\mu} \left(\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, t_k] : \Phi_\tau(x, s) \notin \bar{A}\} \right) \\ & \leq -\frac{1}{(m_k - 1) \cdot \lambda} \log \bar{\mu} \left(\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, m_k \lambda] : \Phi_\tau(x, s) \notin \bar{A}\} \right). \end{aligned}$$

Da die durch die untere beziehungsweise obere Abschätzung gegebenen Folgen jeweils gegen α konvergieren, folgt dies auch für die von ihnen eingeschlossene Folge. \square

Bemerkung 2.11. Durch die Wahl der Schrittweite 1 in [Lemma 2.10](#) erkennt man sofort, dass für ein Loch $A \subset X$ die Ausströmraten $\rho(A, \mathbb{1})$ bezüglich der Halbströmung unter der Dachfunktion $\mathbb{1}$ und $\rho(A)$ bezüglich der Basistransformation übereinstimmen.

Lemma 2.12. *Es sei φ eine messbare Funktion von X nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$, die beschränkt und von Null weg beschränkt ist. Ferner sei $A \subset X$ ein Loch, bezüglich dessen die Ausströmrates $\rho(\varphi)$ existiert. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \rho(\varphi) &= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \bar{\mu}_\varphi \left(\{(x, s) \in \bar{X}_\varphi \mid N_A(x) \geq N_t^\varphi(x)\} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \mu \left(\{x \in X \mid N_A(x) \geq N_t^\varphi(x)\} \right). \end{aligned}$$

Beweis. Es bezeichnen $\bar{X}_\varphi, \bar{X}_\mathbb{1}$ und $\bar{\mu}_\varphi, \bar{\mu}_\mathbb{1}$ die Räume und Maße der zu den Dachfunktionen φ beziehungsweise $\mathbb{1}$ gehörenden Strömungen. Gemäß [Bemerkung 2.8](#) gilt

$$\rho(\varphi) = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \bar{\mu}_\varphi \left(\{(x, s) \in \bar{X}_\varphi \mid N_A \geq N_{t+s}^\varphi\} \right).$$

Die erste Gleichheit des Lemmas erhält man durch die Beobachtung

$$\begin{aligned} \rho(\varphi) &= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \bar{\mu}_\varphi \left(\{(x, s) \in \bar{X}_\varphi \mid N_A \geq N_{t+s}^\varphi\} \right) \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \bar{\mu}_\varphi \left(\{(x, s) \in \bar{X}_\varphi \mid N_A \geq N_{t+\sup \varphi}^\varphi\} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t - \sup \varphi} \bar{\mu}_\varphi \left(\{(x, s) \in \bar{X}_\varphi \mid N_A \geq N_t^\varphi\} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \bar{\mu}_\varphi \left(\{(x, s) \in \bar{X}_\varphi \mid N_A \geq N_t^\varphi\} \right) \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \bar{\mu}_\varphi \left(\{(x, s) \in \bar{X}_\varphi \mid N_A \geq N_{t+s}^\varphi\} \right) \\ &= \rho(\varphi). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit ergibt sich darauf aufbauend durch

$$\begin{aligned}
\rho(\varphi) &= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \bar{\mu}_\varphi \left(\left\{ (x, s) \in \bar{X}_\varphi \mid N_A \geq N_t^\varphi \right\} \right) \\
&\leq \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \left(\inf \varphi \cdot \bar{\mu}_\mathbb{1} \left(\left\{ (x, s) \in \bar{X}_\mathbb{1} \mid N_A \geq N_t^\varphi \right\} \right) \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \left(\bar{\mu}_\mathbb{1} \left(\left\{ (x, s) \in \bar{X}_\mathbb{1} \mid N_A \geq N_t^\varphi \right\} \right) \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \left(\sup \varphi \cdot \bar{\mu}_\mathbb{1} \left(\left\{ (x, s) \in \bar{X}_\mathbb{1} \mid N_A \geq N_t^\varphi \right\} \right) \right) \\
&\leq \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \left(\bar{\mu}_\varphi \left(\left\{ (x, s) \in \bar{X}_\varphi \mid N_A \geq N_t^\varphi \right\} \right) \right) \\
&= \rho(\varphi)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \left(\bar{\mu}_\mathbb{1} \left(\left\{ (x, s) \in \bar{X}_\mathbb{1} \mid N_A \geq N_t^\varphi \right\} \right) \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \left(\mu \left(\left\{ x \in X \mid N_A(x) \geq N_t^\varphi(x) \right\} \right) \right).
\end{aligned}$$

□

Satz 2.6 beschreibt Eigenschaften der Ausströmrates unter Veränderungen des Lochs. Der nachfolgende Satz sammelt erste einfache Eigenschaften der Ausströmrates bei Veränderungen der Dachfunktion.

Satz 2.13. *Es seien φ, ψ messbare Funktionen von X nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$, die beschränkt und von Null weg beschränkt sind. Es sei zudem eine messbare Menge $A \subset X$ als Loch fixiert, bezüglich dessen die Ausströmrates $\rho(\varphi), \rho(\psi)$ existieren.*

- A. Wenn $\varphi \leq \psi$, dann ist $\rho(\varphi) \geq \rho(\psi)$.
- B. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $\rho(\lambda\varphi) = \frac{1}{\lambda}\rho(\varphi)$.
- C. Wenn es eine beschränkte, messbare Funktion $\chi : X \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass $\psi = \varphi + \chi \circ \theta - \chi$, dann gilt $\rho(\psi) = \rho(\varphi)$.

Beweis. Nach **Lemma 2.12** gilt

$$\rho(\varphi) = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \left(\mu \left(\left\{ x \in X \mid N_A(x) \geq N_t^\varphi(x) \right\} \right) \right).$$

Vermöge dieser Gleichung folgt die Aussage (A) aus der Tatsache, dass $\varphi \leq \psi$ die Ungleichung $N_t^\psi \leq N_t^\varphi$ impliziert. Aussage (B) erhält man aus $N_t^{\lambda\varphi} = N_t^\varphi$. Für Aussage (C) beachte man, dass $S_n\psi = S_n\varphi + \chi \circ \theta^n - \chi$

und folglich $|S_n\psi - S_n\varphi| \leq |\chi \circ \theta^n - \chi| \leq 2 \cdot \sup |\chi| =: c < \infty$. Hieraus ergibt sich

$$N_t^\varphi = \min \{n \in \mathbb{N} | S_n\varphi > t\} \leq \min \{n \in \mathbb{N} | S_n\psi - c > t\} = N_{t+c}^\psi,$$

woraus man schließt, dass

$$\begin{aligned} \rho(\varphi) &= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \left(\mu \left(\left\{ x \in X \mid N_A(x) \geq N_t^\varphi(x) \right\} \right) \right) \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \left(\mu \left(\left\{ x \in X \mid N_A(x) \geq N_{t+c}^\psi(x) \right\} \right) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \left(\mu \left(\left\{ x \in X \mid N_A(x) \geq N_t^\psi(x) \right\} \right) \right) \\ &= \rho(\psi). \end{aligned}$$

Auf analoge Weise erhält man $N_t^\psi \leq N_{t+c}^\varphi$ und folglich $\rho(\varphi) \geq \rho(\psi)$, woraus sich die gewünschte Gleichheit ergibt. \square

Korand

Eigenschaft (c) besagt, dass Halbströmungen, deren Dachfunktionen nur um eine Funktion der Form $\chi \circ \theta - \chi$, genannt *KORAND*, voneinander abweichen, nicht anhand ihrer Ausströmraten unterschieden werden können. Dies ist nicht überraschend, da bekannt ist,⁵ dass (invertierbare) Strömungen isomorph sind, wenn ihre Dachfunktionen sich nur um einen Korand unterscheiden.

Bemerkung 2.14. In [Satz 2.13](#) kann anstelle der Ausströmrates auch die obere oder untere Ausströmrates verwendet werden, um Aussagen für Situationen zu erhalten, in denen die Ausströmrates nicht existiert.

⁵ Siehe [\[Gur1965, Theorem 1\]](#).

BERECHNEN DER AUSSTRÖMRATE

Um die Ausströmrates für konkrete Systeme berechnen zu können, ist es sinnvoll, die Situation, die betrachtet werden muss, so einfach wie möglich zu gestalten. Bei der Behandlung von Halbströmungen unter einer Funktion bedeutet dies, dass man unter anderem die Dachfunktion von einfacher Gestalt wählen möchte. Um dennoch Ergebnisse für kompliziertere Dachfunktionen ableiten zu können, ist es erforderlich, diese komplizierten Dachfunktionen durch Einfache approximieren zu können. Die Ausströmrates erlaubt ein derartiges Vorgehen, denn sie erfüllt eine Stetigkeitseigenschaft bezüglich der Dachfunktion.

Satz 3.1. *Es bezeichne X einen metrischen Raum. Man betrachte Halbströmungen über einer Basistransformation $\theta : X \rightarrow X$. Es sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver, messbarer, beschränkter und von Null weg beschränkter Funktionen $\varphi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine positive, messbare, beschränkte und von Null weg beschränkte Funktion $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.⁶ Überdies sei ein Loch $A \subset X$ fixiert. Dann gilt, sofern die Ausströmrates existieren:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\varphi_n) = \rho(\varphi).$$

Beweis. Es sei $0 < \varepsilon < \inf \varphi$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt $\|\varphi - \varphi_n\|_\infty < \varepsilon$. Hieraus folgt

$$\forall x \in X : |\varphi(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon \cdot \frac{\varphi(x)}{\inf \varphi},$$

woraus sich die Ungleichung

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{\inf \varphi}\right) \varphi < \varphi_n < \left(1 + \frac{\varepsilon}{\inf \varphi}\right) \varphi$$

ergibt. Mit [Satz 2.13](#) kann nun geschlossen werden, dass für die Ausströmrates gilt

$$\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{\inf \varphi}} \cdot \rho(\varphi) \leq \rho(\varphi_n) \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{\inf \varphi}} \cdot \rho(\varphi). \quad (2)$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, impliziert dies die gewünschte Konvergenz $\rho(\varphi_n) \rightarrow \rho(\varphi)$. \square

⁶ Gleichmäßige Konvergenz bedeutet hierbei Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auf dem Raum der beschränkten Funktion von X nach \mathbb{R} .

Bemerkung 3.2. In [Satz 3.1](#) reicht es aus, die Existenz der $\rho(\varphi_n)$ zu fordern. Dann kann das Argument des Beweises gemäß [Bemerkung 2.14](#) jeweils auf obere und untere Ausströmrates angewendet werden und somit folgt die Existenz von $\rho(\varphi)$ aus der Existenz der $\rho(\varphi_n)$.

Offenkundig können auf Grund der Monotonieeigenschaft in [Satz 2.13 \(A\)](#) Approximationen von oben und unten für untere und obere Abschätzungen der wahren Ausströmrates herangezogen werden. Aber auch eine beliebige gleichmäßige Approximation kann für eine solche Abschätzung genutzt werden, wie aus [Gleichung \(2\)](#) ersichtlich ist.

Korollar 3.3. *Es sei φ wie in [Satz 3.1](#). Ferner sei ψ eine messbare Funktion mit $\|\varphi - \psi\|_\infty < \varepsilon < \inf \varphi$. Dann gilt, sofern die Ausströmrates existieren:*

$$\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{\inf \psi}} \cdot \rho(\psi) \leq \rho(\varphi) \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{\inf \psi}} \cdot \rho(\psi).$$

Wenn die Basistransformation $\theta : X \rightarrow X$ ein endlicher Markovshift ist, so sind die einfachsten nichtkonstanten Dachfunktionen die arithmetischen Zylinderfunktionen. Diese lassen sich nutzen, um beliebige stetige Dachfunktionen zu approximieren.

Lemma 3.4. *Es sei [Annahme 1.14](#) erfüllt. Wenn die Dachfunktion $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist sie gleichmäßig approximierbar durch Zylinderfunktionen $\varphi_n := \sum_{i=1}^{m_n} \lambda_{i,n} \chi_{i,n} \in Z_n$, wobei $\lambda_{i,n} \in \mathbb{R}$ ist und $\chi_{i,n}$ die Indikatorfunktion einer Zylindermenge bezeichnet. Zudem ist es möglich, hierbei die $\lambda_{i,n}$ von der Form $k_{i,n} \cdot \lambda_n$ mit $k_{i,n} \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ zu wählen. φ kann also insbesondere durch eine Folge arithmetischer Zylinderfunktionen gleichmäßig approximiert werden.*

Beweis. Die Aussage folgt aus der Tatsache, dass X kompakt und folglich φ gleichmäßig stetig ist, sowie der Beobachtung, dass metrische Kugeln in X gerade die Zylindermengen sind. \square

Bemerkung 3.5. Man beachte, dass in [Annahme 1.14](#) ein endliches Alphabet vorausgesetzt wird. Die approximierenden Zylinderfunktionen φ_n können folglich als eine endliche Linearkombination von n -Zylindern gewählt werden (anstelle von Zylindern verschiedener Länge).

Aufgrund der Approximationsmöglichkeit aus [Satz 3.1](#) kann man sich bei der Untersuchung von Ausströmrates von Halbströmungen unter einer Funktion weitgehend darauf beschränken, arithmetische Zylinderfunktionen als Dachfunktion zu betrachten und anschließend die Ergebnisse durch Stetigkeitsargumente auf stetige Dachfunktionen auszuweiten. Der Vorteil arithmetischer Zylinderfunktionen als Dachfunktion

liegt darin, dass man mittels [Lemma 2.10](#) die Ausströmrates der Halbströmung auf die Ausströmrates eines diskreten Systems zurückführen kann, da es ausreicht, das Ausströmverhalten bezüglich einer Folge mit gleichen Zeitabständen zu untersuchen. Dieser Zeitabstand kann im Falle einer λ -arithmetischen Zylinderfunktion als λ gewählt werden. Wenn man nun zur weiteren Vereinfachung eine Zylindermenge $A \in C_n$ als Loch betrachtet, dann kann, da gemäß [Satz 2.6 \(D\)](#) die Ausströmrates bei gutartigen Löchern nur von der Projektion des Lochs auf die Basis abhängt, das Loch von der Gestalt $\bar{A} = A \times [0, \lambda)$ gewählt werden, was dazu führt, dass man anstelle der Strömung Φ das diskrete System, das durch die Transformation Φ_λ gegeben ist, betrachten kann.

Der erste Schritt zur Berechnung von Ausströmrates für Halbströmungen unter einer Funktion muss also sein, die Ausströmrates eines diskreten Systems berechnen zu können. Dieser Schritt wird in [Abschnitt 3.1](#) vollzogen. In [Abschnitt 3.2](#) wird dies dann auf Halbströmungen über Markovshifts ausgedehnt.

3.1 BERECHNEN DER AUSSTRÖMRATE IN DISKRETEN SYSTEMEN

Man betrachte einen Endomorphismus $\theta : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{A}, \mu)$. Um die Ausströmrates dieses diskreten Systems bezüglich eines Lochs $A \subset X$ zu ermitteln, ist es nötig, das Verhalten von

$$\mu \left(\left\{ x \in X \mid \forall 0 \leq k < n : \theta^k(x) \notin A \right\} \right)$$

zu untersuchen.⁷ Hierbei kann zuerst festgehalten werden, dass die Indikatorfunktionen χ_n der Mengen $\{x \in X \mid \forall 0 \leq k < n : \theta^k(x) \notin A\}$ für $n \in \mathbb{N}$ als

$$\chi_n = \prod_{k=0}^{n-1} (\mathbb{1} - \mathbb{1}_A) \circ \theta^k$$

geschrieben werden können. Indem man $\chi_0 := \mathbb{1}$ setzt, erhält man den Zusammenhang

$$\chi_{n+1} = (\mathbb{1} - \mathbb{1}_A) \cdot (\chi_n \circ \theta).$$

Von Interesse sind also die Werte von $\int \chi_n d\mu$. Dieses Integral kann mittels des Transferoperators ausgedrückt werden.

Definition 3.6. Es sei $\theta : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Endomorphismus. Durch

$$\int_A \mathcal{L}f d\mu = \int_{\theta^{-1}A} f d\mu \quad (3)$$

Transferoperator

für alle $A \in \mathcal{A}$, $f \in L^1_\mu(X)$ wird implizit der TRANSFEROPERATOR (auch: Perron-Frobenius-Operator) $\mathcal{L} : L^1_\mu(X) \rightarrow L^1_\mu(X)$ definiert.

Die rechte Seite von Gleichung (3) definiert ein Maß auf (X, \mathcal{A}) , das absolut stetig bezüglich μ ist. Da f aus $L^1_\mu(X)$ ist, kann mittels eines Korollars zum Satz von Radon-Nikodym [LM1994, Korollar 2.2.1] auf die Existenz einer eindeutigen Dichte bezüglich μ geschlossen werden (gegebenenfalls nach Zerlegung von f in positiven und negativen Anteil), welche dann als $\mathcal{L}f$ bezeichnet wird. Eine ausführliche Darstellung findet sich bei Lasota und Mackey [LM1994, Kapitel 3].

Bemerkung 3.7. Der Transferoperator ist offenkundig abhängig vom zugrundeliegenden Maß μ , verändert sich jedoch nicht, wenn μ nur mit einem positiven Faktor skaliert wird.

Satz 3.8 ([LM1994, Kapitel 3.2 & 3.3]). *Der Transferoperator hat folgende Eigenschaften:*

A. \mathcal{L} ist linear.

⁷ Man beachte Bemerkung 2.2.

- B. $\mathcal{L}f \geq 0$ für alle $f \in L^1$ mit $f \geq 0$.
 C. $\int \mathcal{L}f \, d\mu = \int f \, d\mu$ für alle $f \in L^1$.
 D. $\int (\mathcal{L}f) \cdot g \, d\mu = \int f \cdot (g \circ T) \, d\mu$ für alle $f \in L^1$ und $g \in L^\infty$.

Definition 3.9. Es sei $\theta : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Endomorphismus, und es sei ein Loch $A \subset X$ gewählt. Der Operator \mathcal{L}_{op} , definiert durch

$$\forall f \in L^1 : \quad \mathcal{L}_{op}f := \mathcal{L}((\mathbb{1} - \mathbb{1}_A) \cdot f),$$

wird als TRANSFEROPERATOR DES OFFENEN SYSTEMS mit Loch A bezeichnet.

*Transferoperator
des offenen
Systems*

Die Betrachtung dieses Operators zur Untersuchung von Eigenschaften von Systemen mit Löchern geht mindestens bis auf Liverani und Maume-Deschamps [LMD2003] zurück. Eine solche Herangehensweise findet sich auch in [KL2009] und [CKDE2013]. Die in Definition 3.9 verwendete Notation und Bezeichnung orientiert sich an letzterer Arbeit.

Durch Induktion erhält man die Aussage

$$\int \mathcal{L}_{op}^n f \, d\mu = \int \chi_n \cdot f \, d\mu,$$

woraus sich angewendet auf $f = \mathbb{1}$ ergibt, dass

$$\int \mathcal{L}_{op}^n \mathbb{1} \, d\mu = \int \chi_n \, d\mu. \quad (4)$$

Folglich ist eine nähere Betrachtung der Operatoren \mathcal{L} und \mathcal{L}_{op} angebracht. Zu diesem Zweck werde im Folgenden angenommen, dass die Situation aus Annahme 1.14 vorliegt. Dann kann die Wirkung des Transferoperators auf die Indikatorfunktionen von n -Zylindern explizit angegeben werden als

$$\frac{1}{\mu([b_1, \dots, b_n])} \cdot \mathcal{L}\mathbb{1}_{[b_1, \dots, b_n]} = \sum_{s \in S} \frac{p_{b_n, s}}{\mu([b_2, \dots, b_n, s])} \cdot \mathbb{1}_{[b_2, \dots, b_n, s]}. \quad (5)$$

Der Transferoperator bildet den Vektorraum Z_n der Zylinderfunktionen auf n -Zylindern folglich in sich selbst ab. Als hilfreiche Beobachtung für $n \geq 2$ ist außerdem festzuhalten, dass

$$\mathcal{L}\mathbb{1}_{[b_1, \dots, b_n]} = \frac{\mu([b_1])}{\mu([b_2])} \cdot p_{b_1, b_2} \cdot \mathbb{1}_{[b_2, \dots, b_n]}, \quad (6)$$

was bedeutet, dass $\mathcal{L}(Z_n) \subset Z_{n-1}$.

darstellt, erhält man ausgehend von der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

die Matrixdarstellung

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 000 \\ 001 \\ 010 \\ 011 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & & & & & & \\ & & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & & & & \\ & & & & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & & \\ & & & & & & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & & & & & & \\ & & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & & & & \\ & & & & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & & \\ & & & & & & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Beispiel 3.11. Auf Z_1 ist die Matrixdarstellung von \mathcal{L} identisch mit der Übergangsmatrix P .

Wenn das Loch A ein n -Zylinder $[a_1, \dots, a_n]$ ist, erhält man die Matrix M_{op} des Transferoperators \mathcal{L}_{op} des offenen Systems bezüglich Z_n aus der Matrix von \mathcal{L} , indem man in dieser die zu A gehörende Zeile durch Nullen ersetzt. Da es zur Berechnung der Ausströmrates um das Verhalten von $\mathbb{1}$ unter \mathcal{L}_{op} geht, stellt es keine Einschränkung dar, dass diese Matrixdarstellung \mathcal{L} und \mathcal{L}_{op} nur auf Z_n und nicht auf ganz L^1 beschreibt.

Bemerkung 3.12. Auch die Matrixdarstellung des Transferoperators \mathcal{L}_{op} bezüglich eines Lochs $A = \bigcup_{C \in I} C$ mit $I \subset C_n$, das als endliche Vereinigung von n -Zylindern gegeben ist,⁹ lässt sich aus M gewinnen. Dazu müssen alle Zeilen Null gesetzt werden, die zu einem $\mathbb{1}_C$ mit $C \in I$ gehören.

Von Bedeutung für die Berechnung der Ausströmrates sind, wie anfangs bemerkt, die Integrale $\int \chi_n d\mu$. Gemäß Gleichung (4) entsprechen diese den Integralen $\int \mathcal{L}_{op}^n \mathbb{1} d\mu$. Den Zusammenhang zwischen diesen Integralen und der Matrixdarstellung von \mathcal{L}_{op} erhält man durch die Beobachtung, dass das Integral einer nichtnegativen Zylinderfunktion

$$f = \sum_{C \in C_n} \lambda_C \cdot \frac{1}{\mu(C)} \mathbb{1}_C \in Z_n$$

⁹ Dies beinhaltet die Möglichkeit eines Lochs $A \in C_m$ mit $m \leq n$.

gegeben ist durch

$$\int f \, d\mu = \sum_{C \in \mathcal{C}_n} \lambda_C = \|\vec{f}\|_1.$$

Da \mathcal{L}_{op} nichtnegative Funktionen auf nichtnegative Funktionen abbildet, genügt es zur Untersuchung von $\int \mathcal{L}_{op}^n \mathbb{1} \, d\mu$, das Verhalten der zugehörigen Vektoren $\vec{\mathbb{1}} M_{op}^n$ und ihrer 1-Normen zu betrachten.¹⁰

Satz 3.13. *Es gelte [Annahme 1.14](#). Das Loch $A \subset X$ sei ein m -Zylinder $[a_1, \dots, a_m] \in \mathcal{C}_m$, und es sei M die Matrixdarstellung von $\mathcal{L}_{op} : Z_n \rightarrow Z_n$ mit $n \geq m$. Dann existiert die Ausströmrage, und es gilt*

$$\rho(A) = -\log r(M),$$

wobei $r(M)$ den Spektralradius¹¹ von M bezeichnet. Somit ist wegen [Satz A.2](#) die Ausströmrage gleich dem Negativen des Logarithmus des betragsmäßig größten Eigenwerts von M .

Beweis. Es kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass M die Matrixdarstellung bezüglich der Basis

$$\left\{ \frac{1}{\mu(C)} \cdot \mathbb{1}_C \mid C \in \mathcal{C}_n \right\}$$

ist, da ein Basiswechsel den Spektralradius nicht verändert. Die Ausströmrage ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{k} \log \mu \left(\left\{ x \in X \mid \forall 0 \leq l < k : \theta^l(x) \notin A \right\} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{k} \log \int \mathcal{L}_{op}^k \mathbb{1} \, d\mu \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} -\log \sqrt[k]{\|\vec{\mathbb{1}} \cdot M^k\|_1} \\ &= -\log r(M), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus [Satz A.7](#) folgt. □

Für zylinderartige Löcher ist das Aufstellen der Matrix zu \mathcal{L}_{op} auf Grundlage der Übergangsmatrix P einfach. Die Berechnung der Ausströmrage kann also prinzipiell mittels Standardverfahren zur Berechnung von Eigenwerten erfolgen. Da die Anzahl der Basiselemente jedoch mit wachsender Zylinderlänge des Lochs exponentiell ansteigt und

¹⁰ Man beachte, dass die hier verwendete Schreibweise $\vec{\mathbb{1}}$ den Vektor zur Funktion $\mathbb{1}$, die überall den Funktionswert 1 hat, bezeichnet. Dies darf nicht mit dem ähnlich aussehenden $\bar{\mathbb{1}}$ verwechselt werden, das den Vektor, dessen Einträge alle 1 sind, meint.

¹¹ Siehe [Anhang A.1](#).

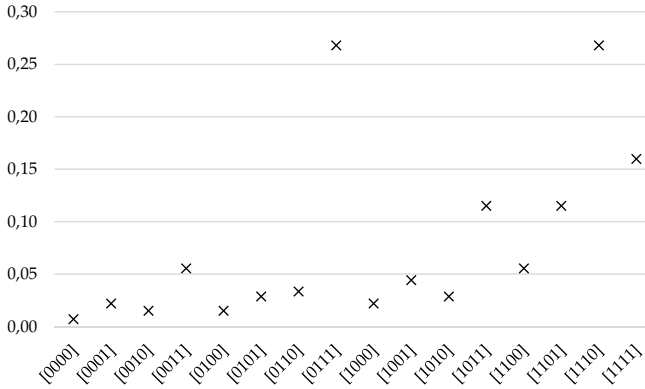


Abbildung 3: Ausströmrates in Abhängigkeit vom gewählten Loch

so schnell zu sehr großen Matrizen führt, ist dieses Vorgehen nur bedingt geeignet, wenn man numerische Ergebnisse gewinnen will. Eine geschicktere Basiswahl, die nur zu einem linearen Anwachsen der Basiselemente führt, wurde von Cristadoro, Knight und Degli Esposti [CKDE2013] vorgestellt. Dieses Verfahren wird in [Abschnitt 7.1](#) näher betrachtet, da es als Hilfsmittel zur Lösung des Umkehrproblems der Ausströmrates zum Einsatz kommt.

Die Beschreibung der Ausströmrates als Eigenwert einer Matrix ermöglicht es, sie auch als Nullstelle eines Polynoms, nämlich des charakteristischen Polynoms $\det(z \cdot \text{id} - M)$ der Matrix M , aufzufassen. In [CAM⁺2012] finden sich Methoden zur Bestimmung der eng verwandten Größe $\det(\text{id} - z \cdot M)$ mittels *cycle expansions*, die zur Ermittlung konkreter Polynome wesentlich effizienter sind. In der Tat entspricht der in diesem Abschnitt genutzte Ansatz, eine Basis aus Indikatorfunktionen von Zylindern einer fixen Länge zu verwenden, eher dem Gedanken der *level sums*, über die es bei Cvitanović heißt:

„The least enlightened are the ‘level sum’ cycle averaging formulas. There is no point in using them, except that they have to be mentioned [...], as there is voluminous literature that uses them.“ [CAM⁺2012, Kapitel 20]

Um die in diesem Abschnitt dargelegten Ergebnisse auf Strömungen unter einer Funktion anzuwenden, wird sich die hier verwendete Matrixgestalt jedoch als vorteilhaft erweisen, da sie es einfach macht, Veränderungen der Dachfunktion zu formulieren.

Beispiel 3.14. Für das System aus [Beispiel 1.12](#) wird in [Abbildung 3](#) dargestellt, wie die Ausströmrate von der Wahl des Lochs abhängt, wenn das Loch als 4-Zylinder gewählt wird.

3.2 BERECHNEN DER AUSSTRÖMRATE FÜR HALBSTRÖMUNGEN UNTER EINER FUNKTION

Es werde vorausgesetzt, dass [Annahme 1.15](#) erfüllt ist und außerdem die Dachfunktion φ stetig ist. Es sei $A := [a_1, \dots, a_m] \subset X$ ein zylinderartiges Loch.¹²

Da X kompakt ist, ergibt sich aus [Satz 3.1](#) und [Lemma 3.4](#), dass man zur Ermittlung der Ausströmrates anstelle von φ die approximierenden (arithmetischen) Zylinderfunktionen betrachten kann. Daher werde im Folgenden angenommen, dass φ eine arithmetische Zylinderfunktion der Gestalt

$$\varphi = \lambda \cdot \sum_{(b_1, \dots, b_n) \in \Sigma_p^n} k_{[b_1, \dots, b_n]} \cdot \mathbb{1}_{[b_1, \dots, b_n]} \quad (7)$$

ist, mit $n \geq m$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k_{[b_1, \dots, b_n]} \in \mathbb{N}$ für alle $(b_1, \dots, b_n) \in \Sigma_p^n$. Für das Loch $\bar{A} \subset \bar{X}$ kann anstelle von $\pi_1^{-1}(A)$ wegen [Satz 2.6 \(D\)](#) auch $\bar{A} := A \times [0, \lambda)$ gewählt werden, ohne dass sich die Ausströmrates ändert. Auf Grund von [Lemma 2.10](#) reicht es aus, den Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{k\lambda} \log \bar{\mu} (\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, k\lambda] : \Phi_\tau(x, s) \notin \bar{A}\})$$

zu untersuchen. Dieser Ausdruck kann auf Grund der speziellen Gestalt von Loch und Dachfunktion weiter vereinfacht werden, denn

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{k\lambda} \log \bar{\mu} (\{(x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, k\lambda] : \Phi_\tau(x, s) \notin \bar{A}\}) \quad (8) \\ &= -\frac{1}{k\lambda} \log \bar{\mu} \left(\left\{ (x, s) \in \bar{X} \mid (x, s) \notin \bigcup_{\tau \in [0, k\lambda]} \Phi_\tau^{-1}(\bar{A}) \right\} \right) \\ &= -\frac{1}{k\lambda} \log \bar{\mu} \left(\left\{ (x, s) \in \bar{X} \mid (x, s) \notin \bigcup_{l=0}^k \Phi_\lambda^{-l}(\bar{A}) \right\} \right) \\ &= -\frac{1}{k\lambda} \log \bar{\mu} \left(\left\{ (x, s) \in \bar{X} \mid \forall 0 \leq l \leq k : \Phi_\lambda^l(x, s) \notin \bar{A} \right\} \right). \end{aligned}$$

Anstelle der Halbströmung Φ reicht es also aus, das zu der Transformation Φ_λ gehörende diskrete System zu betrachten. Analog zu den Bezeichnungen in [Abschnitt 3.1](#) bezeichne $\bar{\mathcal{L}}$ den Transferoperator zu Φ_λ bezüglich des Maßes $\bar{\mu}$, und $\bar{\mathcal{L}}_{op}$ bezeichne den Transferoperator des offenen Systems mit Loch \bar{A} . Um eine nützliche Matrixgestalt für $\bar{\mathcal{L}}_{op}$ angeben zu können, muss eine Basis eines Teilraums von $L^1_{\bar{\mu}}(\bar{X})$ gewählt

¹² Man beachte [Bemerkung 2.7](#).

werden, der von $\bar{\mathcal{L}}_{op}$ in sich selbst abgebildet wird und $\mathbb{1}$ enthält. In [Abschnitt 3.1](#) wurde diese Basis für einen Markovshift auf Grundlage der Zylindermengen gebildet; in der Halbströmungssituation muss dieser Zugang erweitert werden.

Der Raum \bar{X} kann disjunkt in die Mengen

$$C \times [(k-1)\lambda, k\lambda] \quad \text{mit } C \in C_n, k \in \mathbb{N}, 0 < k \leq k_C$$

zerlegt werden. Für die Indikatorfunktionen dieser Mengen lässt sich das Wirken des Transferoperators ermitteln:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu([b_1, \dots, b_n])} \cdot \bar{\mathcal{L}} \mathbb{1}_{[b_1, \dots, b_n] \times [(k-1)\lambda, k\lambda]} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\mu([b_1, \dots, b_n])} \cdot \mathbb{1}_{[b_1, \dots, b_n] \times [k\lambda, (k+1)\lambda]} & , k < k_{[b_1, \dots, b_n]} \\ \sum_{s \in S} \frac{p_{b_n s}}{\mu([b_2, \dots, b_n, s])} \cdot \mathbb{1}_{[b_2, \dots, b_n, s] \times [0, \lambda]} & , k = k_{[b_1, \dots, b_n]} \end{cases} \quad (9) \end{aligned}$$

Durch die Wahl von

$$\left\{ \frac{1}{\mu(C)} \cdot \mathbb{1}_{C \times [(k-1)\lambda, k\lambda]} \mid C \in C_n, k \in \mathbb{N}, 0 < k \leq k_C \right\}$$

als Basis des von ihr erzeugten Unterraums $\bar{Z}_n \subset L^1_\mu(\bar{X})$, erhält der Transferoperator $\bar{\mathcal{L}}$ auf \bar{Z}_n die Blockmatrixgestalt

$$\left(B_{[b_1, \dots, b_n], [c_1, \dots, c_n]} \right)_{(b_1, \dots, b_n), (c_1, \dots, c_n) \in \Sigma_p^n} \quad (10)$$

wobei die Blöcke $B_{[b_1, \dots, b_n], [c_1, \dots, c_n]}$ auf der Diagonalen von der Größe $k_{[b_1, \dots, b_n]} \times k_{[c_1, \dots, c_n]}$ sind und die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ * & 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix}$$

haben. Die restlichen Blöcke sind von der Größe $k_{[b_1, \dots, b_n]} \times k_{[c_1, \dots, c_n]}$ und haben die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \\ * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

wie aus [Gleichung \(8\)](#) ersichtlich, durch λ geteilt werden, um die Ausströmrates zum Loch A und der Halbströmung Φ zu erhalten.

Korollar 3.17. *Es gelte [Annahme 1.15](#) mit einer stetigen Dachfunktion φ . Ferner sei das Loch A ein m -Zylinder $[a_1, \dots, a_m] \in C_m$. Dann existiert die Ausströmrates $\rho(A, \varphi)$.*

Beweis. Wegen [Lemma 3.4](#) kann φ gleichmäßig durch arithmetische Zylinderfunktionen approximiert werden. Es sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine solche Approximation von unten und $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine von oben. Aus [Satz 3.16](#) folgt, dass die Ausströmrates $\rho(\varphi_n)$ und $\rho(\psi_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren. Da beide Funktionenfolgen gleichmäßig gegen φ konvergieren – eine von unten, die andere von oben – und die Grenzwerte der Folgen der Ausströmrates existieren, da die Folgen beschränkt und monoton sind aufgrund der Monotonieeigenschaft aus [Satz 2.13 \(A\)](#), folgt aus [Korollar 3.3](#), dass die Grenzwerte der Folgen der Ausströmrates übereinstimmen. Mit [Bemerkung 2.14](#) folgt nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\varphi_n) \leq \underline{\rho}(\varphi) \leq \bar{\rho}(\varphi) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\psi_n)$$

und somit stimmen wegen der Gleichheit der zwei Grenzwerte obere und untere Ausströmrates von φ überein, was bedeutet, dass $\rho(\varphi)$ existiert. \square

Die Approximation stetiger Funktionen durch spezielle Zylinderfunktionen erlaubt es, Näherungswerte und Fehlerabschätzungen für die Ausströmrates zu berechnen. Die dabei auftretende Matrix wird jedoch sehr schnell enorm groß. Im Gegensatz zur Situation in [Abschnitt 3.1](#), wo die Matrix für ein Loch $A = [a_1, \dots, a_m] \in C_m$ eine Zeilen- und Spaltenzahl von $|\Sigma_p^m|$ hat (für einen vollen Shift also $|S|^m$), ist dieser Wert bloß eine untere Schranke für die Matrix im Fall einer Halbströmung unter einer Funktion. Die Approximation einer stetigen Dachfunktion führt – sofern die Funktion nicht konstant auf n -Zylindern für ein gewisses n ist – zur Notwendigkeit, immer feinere Partitionen der Basis zu verwenden. Desweiteren müssen – sofern die zu approximierende Funktion nicht nur Werte in $r\mathbb{Z}$ für ein gewisses $r \in \mathbb{R}$ annimmt – bei kleiner werdendem Skalierungsfaktor λ , der gewissermaßen die vertikale Schrittweite beschreibt, auch die $k_{[b_1, \dots, b_n]}$ immer weiter anwachsen. Neben der Länge des Lochs ist also vor allem die gewünschte Approximationsgüte der Dachfunktion für das Wachstum der Matrix verantwortlich.

Eine Möglichkeit, den betragsmäßig maximalen Eigenwert der Matrix zu bestimmen, ist es, das charakteristische Polynom zu ermitteln

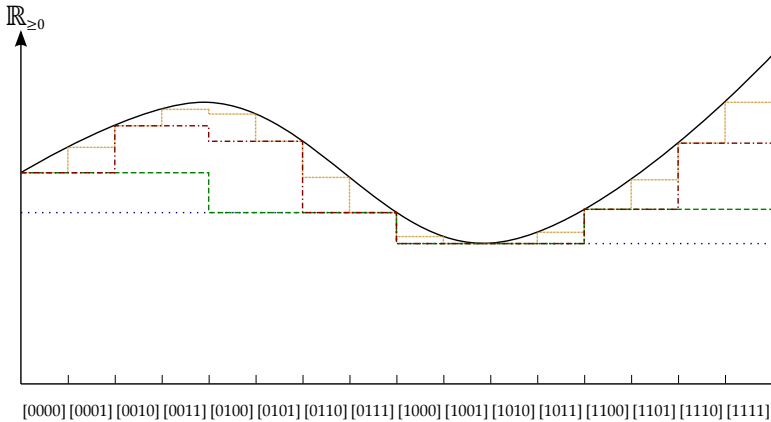


Abbildung 4: Approximation einer stetigen Funktion durch Zylinderfunktionen

und die maximale Nullstelle zu finden. Wenn man an einer numerischen Approximation der Nullstelle interessiert ist, kann man ausnutzen, dass bekannt ist, dass dieser Eigenwert betragsmäßig ≤ 1 ist¹³ und somit 1 ein guter Startwert für ein Verfahren zur Nullstellenbestimmung ist. Das charakteristische Polynom der Matrix lässt sich nicht nur als $\det(z \cdot \text{id} - \bar{M})$ aus der Matrixdarstellung des Transferoperators $\bar{\mathcal{L}}_{op}$ des offenen Systems bestimmen, sondern durch eine Umformulierung kann man es als eine Determinante schreiben, die die Einflüsse von Dachfunktion und Basistransformation klarer hervortreten lässt.

Lemma 3.18. *Es sei \bar{M}_{op} eine Blockmatrix von der in Gleichung (10) und den darauf folgenden Gleichungen beschriebenen Gestalt, die von einer Matrix M , einem Vektor $(k_C)_{C \in C_n} \in \mathbb{N}^{|C_n|}$ und einem Loch A herkommt. Dann gibt es ein $\epsilon \in \{-1, 1\}$ mit*

$$\det(z \cdot \text{id} - \bar{M}_{op}) = \epsilon \cdot \det\left(\text{diag}\left(z^{k_C}\right)_{C \in C_n} - M_{op}\right),$$

wobei M_{op} aus M durch das Nullsetzen aller zu A gehörenden Zeilen entsteht.

Beweis. Zuerst stelle man fest, dass aufgrund der speziellen Blockmatrixgestalt gilt

$$\det(z \cdot \text{id} - \bar{M}_{op}) = \det\left(z \cdot \text{id} - \bar{M}'_{op}\right),$$

¹³ Die Matrix M ist nichtnegativ und zeilenstochastisch, hat also 1 als betragsmäßig maximalen Eigenwert. Da M_{op} aus M durch das Nullsetzen gewisser Einträge entsteht, sind die Zeilensummen ≤ 1 und man kann folgern, dass der betragsmäßig maximale Eigenwert ebenfalls höchstens 1 ist.

wobei \bar{M}'_{op} jene Matrix bezeichnet, die sich aus M_{op} und dem Vektor $(k_C)_{C \in C_n} \in \mathbb{N}^{|C_n|}$ ableitet. Anschaulich bedeutet dies, dass sich die Determinante des Operators nicht verändert, wenn man das Loch in Einklang mit [Satz 2.6 \(d\)](#) abändert; hier heißt dies, dass man \bar{A} nicht als $A \times [0, \lambda]$ wählt, sondern als $A \times [(k_A - 1)\lambda, k_A\lambda]$ (sofern $A \in C_n$; falls A eine Vereinigung von n -Zylindern ist, verfährt man analog für jeden n -Zylinder $C \subset A$).

Im Wesentlichen sind die Blöcke $B_{C,C}$ auf der Diagonalen von Interesse. Diese sind von der Gestalt

$$B_{C,C} = \begin{pmatrix} z & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ -m_{C,C} & & & & z \end{pmatrix},$$

wobei die $m_{C,D}$ mit $C, D \in C_n$ die Einträge von M_{op} bezeichnet. Wenn man nun von rechts beginnend nacheinander jede Spalte mit z multipliziert und auf jene zu ihrer Linken addiert, erhält man

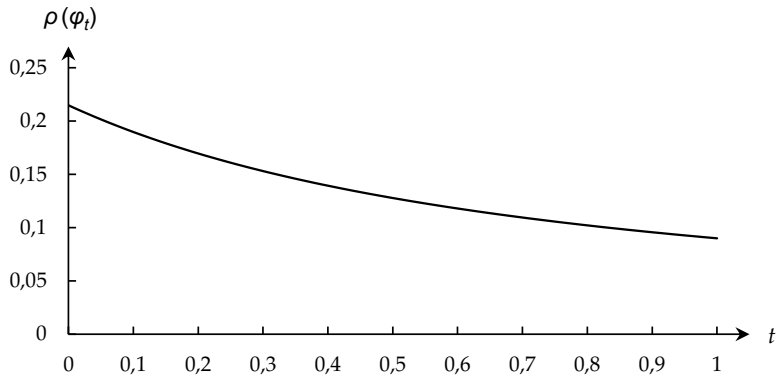
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & -1 \\ z^{k_C} - m_{C,C} & z^{k_C-1} & \dots & z^2 & z \end{pmatrix}.$$

Diese Spaltenoperationen kann man auch auf der kompletten Matrix $z \cdot \text{id} - \bar{M}'_{op}$ durchführen. Dabei ändert sich die Determinante nicht, und auch die Einträge außerhalb der Diagonalblöcke bleiben unverändert, da in den Blöcken außerhalb der Diagonalen jeweils nur Nullen hinzuaddiert werden.

Wiederum aufgrund der speziellen Blockgestalt kann man die Diagonalblöcke durch

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & -1 \\ z^{k_C} - m_{C,C} & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

ersetzen ohne die Determinante zu verändern. Wenn man nun die Zeilen und Spalten der großen Matrix neu sortiert, sodass der neu entstandene $\text{diag}(-1, \dots, -1)$ -Teilblock nach links oben wandert, ändert sich

Abbildung 5: Ausströmraten der φ_t aus [Beispiel 3.20](#)

für $t \in [0, 1]$ betrachtet. Die relevanten Polynome sind

$$\begin{aligned}
 f_t(z) &:= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - z^{2+5t} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -z^{2+5t} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -z^{2+(1-t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z^{2+(1-t)} \end{pmatrix} \\
 &= z^{10} - \frac{1}{3}z^{8-t} - \frac{1}{6}z^5.
 \end{aligned}$$

[Abbildung 5](#) zeigt, wie sich die Ausströmräte verändert, wenn man durch Variation von t verschiedene Dachfunktionen betrachtet.

Aus [Satz 2.13](#) ist bekannt, dass die reziproke Ausströmrates $\rho^{-1} = 1/\rho$ in Abhängigkeit von der Dachfunktion positiv homogen ist und eine Monotonieeigenschaft erfüllt. Mittels dieser zwei Eigenschaften ist es immer möglich, aus der Kenntnis der Ausströmrates zu einer Dachfunktion eine obere und untere Abschätzung für die Ausströmrates einer beliebigen anderen Dachfunktion zu gewinnen, jedoch ist diese Technik des Abschätzens recht ungenau, wenn die Dachfunktionen in der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm nicht nah beieinander liegen. Gerade wenn man eine Situation wie in [Beispiel 3.20](#) betrachtet, wo gewichtete Mittel zweier Dachfunktionen betrachtet werden, tritt dies auf. Eine Information über Konvexität oder Konkavität der Ausströmrates würde hier bessere Abschätzungen erlauben. Zwar legt die Grafik zu [Beispiel 3.20](#) die Vermutung nahe, dass ρ konvex ist, jedoch ist dies allgemein nicht richtig, wie das [Beispiel 4.1](#) zeigt.

Beispiel 4.1. Es sei $\theta : X \rightarrow X$ ein Bernoullishift auf dem Alphabet $\{0, 1, 2\}$ mit der überall gleichen Übergangswahrscheinlichkeit $1/3$. Dann erhält man für das Loch $A := [1]$ und die Schar der Dachfunktionen

$$\varphi_t := 1 + t \cdot \mathbb{1}_{[0]} + (1 - t) \cdot \mathbb{1}_{[2]}$$

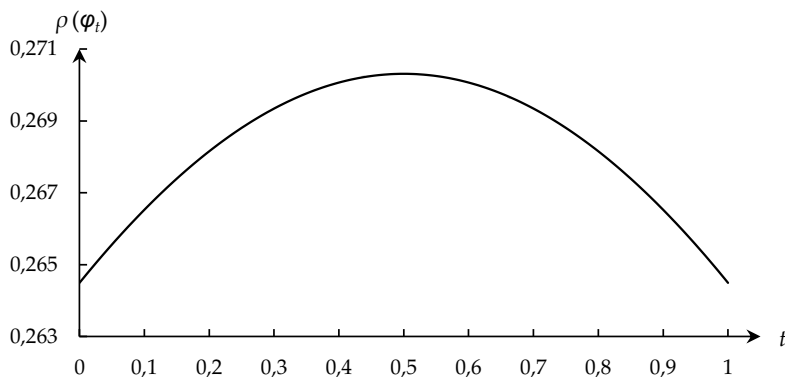
den in [Abbildung 6](#) illustrierten Zusammenhang zwischen t und $\rho(A, \varphi_t)$.

Offenbar ist die Ausströmrates also im Allgemeinen nicht konvex oder konkav. Tatsächlich stellt sich heraus, dass es bei Fragen der Abhängigkeit von der Dachfunktion sinnvoll ist, die reziproke Ausströmrates ρ^{-1} zu untersuchen, denn diese ist konvex, wenn die Basistransformation ein Markovshift ist.

Theorem 4.2. *Man betrachte Halbströmungen unter den stetigen Funktionen φ und ψ über der Basistransformation $\theta : X \rightarrow X$, die [Annahme 1.14](#) erfülle. Es gelte $0 < \inf \varphi \leq \sup \varphi < \infty$ sowie $0 < \inf \psi \leq \sup \psi < \infty$. Das Loch $A \subset X$ sei eine Zylindermenge. Dann gilt:*

$$\forall t \in [0, 1] : \rho^{-1}(t \cdot \varphi + (1 - t) \cdot \psi) \leq t \cdot \rho^{-1}(\varphi) + (1 - t) \cdot \rho^{-1}(\psi)$$

Der Beweis dieses Theorems wird in [Abschnitt 4.2](#) gegeben werden. Dabei wird die Aussage zuerst für arithmetische Zylinderfunktionen gezeigt und anschließend auf Basis der Approximationsidee aus [Satz 3.1](#)

Abbildung 6: Ausströmraten der φ_t aus [Beispiel 4.1](#)

auf stetige Funktionen ausgedehnt. Zuvor werden in [Abschnitt 4.1](#) für den Beweis notwendige Konzepte aus der Amöbentheorie, einem Bindeglied zwischen algebraischer und tropischer Geometrie, eingeführt. In [Abschnitt 4.3](#) wird ein alternativer Beweis erbracht werden, der auf einer Beschreibung der Ausströmraten als induziertem Druck basiert.

Korollar 4.3. *Unter den Voraussetzungen von [Theorem 4.2](#) ist ρ^{-1} sublinear:*

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{>0} : \rho^{-1}(\lambda_1 \cdot \varphi + \lambda_2 \cdot \psi) \leq \lambda_1 \cdot \rho^{-1}(\varphi) + \lambda_2 \cdot \rho^{-1}(\psi)$$

Beweis. Nach [Satz 2.13](#) ist ρ^{-1} positiv homogen und nach [Theorem 4.2](#) konvex. Aus diesen beiden Eigenschaften folgt gemäß der Theorie konvexer Funktionen (siehe beispielsweise [[AB1994](#), Definition 4.30]), dass ρ^{-1} sublinear ist. \square

Wie [Beispiel 3.20](#) bereits gezeigt hat, kann aus der Konvexität von ρ^{-1} nicht geschlossen werden, dass ρ konkav ist. Die schwächere Eigenschaft der Quasikonkavität kann jedoch für ρ gezeigt werden.

quasikonkav

Definition 4.4. Eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer konvexen Teilmenge V eines reellen Vektorraums heißt QUASIKONKAV, wenn

$$\forall v_1, v_2 \in V, t \in [0, 1] : f(tv_1 + (1-t)v_2) \geq \min\{f(v_1), f(v_2)\}.$$

Korollar 4.5. *Unter den Voraussetzungen von [Theorem 4.2](#) ist ρ quasikonkav.*

Beweis. ρ^{-1} ist positiv und konvex auf der Menge der positiven stetigen Funktionen auf X . Daher ist ρ nach [[Flo1995](#), 2.3.2 (ii)] quasikonkav. \square

4.1 AMÖBEN

Gemäß Lemma 3.18 sind die Nullstellen von Polynomen der Gestalt $\chi = \det(D - M)$ von besonderem Interesse, wobei $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ mit $r(M) \in (0, 1)$ und $D := \text{diag}(z^{k_1}, \dots, z^{k_n})$ mit $k_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \dots, n$. Im Kontext von Ausströmraten kodieren die Exponenten k_i der Einträge von D die Höhe der Dachfunktion über den Zylindermengen der Basis. Um die Ausströmraten von verschiedenen Dachfunktionen zu untersuchen, müssen diese Exponenten variiert werden.

Es kann mehr Struktur in dieses Problem gebracht werden, indem jedes z^{k_i} durch eine eigene Unbestimmte z_i und die Bedingung $z_i = z^{k_i}$ ersetzt wird. Es sei also $E := \text{diag}(z_1, \dots, z_n)$ und $f := \det(E - M)$. Die Nullstellenmenge von χ kann dann als

$$\{x \in \mathbb{C} \mid \chi(x) = 0\} = \left\{ x \in \mathbb{C} \mid z_i = x^{k_i} \text{ für } 1 \leq i \leq n; f(z_1, \dots, z_n) = 0 \right\}$$

geschrieben werden. Da die betragsmäßig maximale Nullstelle λ von χ reell und positiv gewählt werden kann,¹⁴ lässt sich für sie die Bedingung $z_i = \lambda^{k_i}$ logarithmiert als

$$\log z_i = k_i \cdot \log \lambda$$

schreiben. Die k_i treten jetzt nicht mehr als Exponenten auf, die Situation wurde durch das Logarithmieren linearisiert. Offensichtlich kann dieses naive Logarithmieren nicht auf alle Elemente der Nullstellenmenge angewendet werden, da diese im Allgemeinen nicht ausschließlich positiv und reell sind. Man kann sich jedoch ohne relevanten Informationsverlust auf Elemente ungleich Null beschränken, da eine Nullstelle 0 unabhängig von der Wahl der k_i und somit uninteressant für das Verhalten der Ausströmrates bei Veränderungen der Dachfunktion ist. Für Elemente ungleich Null kann durch das Vorschalten der Betragsfunktion sichergestellt werden, dass man anschließend den Logarithmus nehmen kann; die reellen positiven Elemente, die von besonderem Interesse sind, werden dabei nicht verändert. Wenn dieser Logarithmierungsschritt komponentenweise auf die Nullstellenmenge von f in \mathbb{C}^n angewendet wird, dann entspricht die Nullstelle λ einem Schnittpunkt der Geraden $\vec{k}\mathbb{R}$ mit dieser logarithmierten Nullstellenmenge, denn es gilt

$$\log \lambda \in \left\{ \eta \in \mathbb{R} \mid \vec{\eta} \vec{k} \in \left\{ (\log |z_i|)_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{z} \in \mathbb{T}^n, f(\vec{z}) = 0 \right\} \right\}, \quad (11)$$

wobei $\mathbb{T}^n := (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ den KOMPLEXEN n -TORUS bezeichnet und

*komplexer
n-Torus*

¹⁴ Man kann gemäß Satz A.4 $\lambda = r(M)$ wählen.

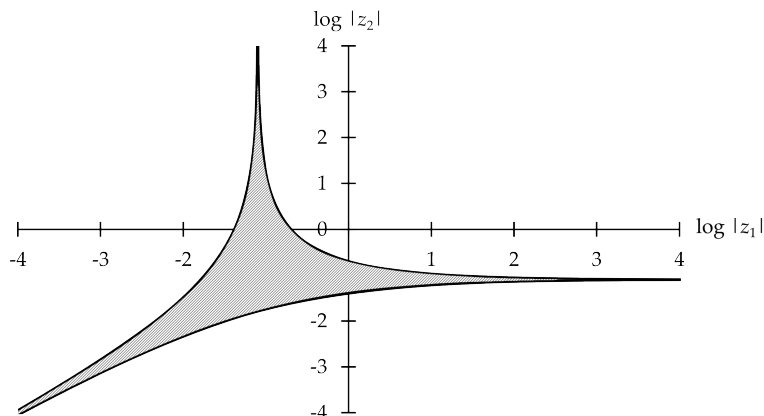


Abbildung 7: Amöbe des Polynoms $(z_1 - \frac{1}{3}) \cdot (z_2 - \frac{1}{3}) - \frac{1}{9}$

$f(\vec{z})$ eine verkürzte Schreibweise für $f(z_1, \dots, z_n)$ ist. Es liegt die Vermutung nahe, dass auf Grund der Extremalität von λ als Nullstelle von χ auch dieser Schnittpunkt durch eine Extremalitätseigenschaft charakterisiert ist. Man muss jedoch berücksichtigen, dass die ursprünglichen Bedingungen $z_i = x^{k_i}$ nach dem Rückübersetzen aus den logarithmischen Schnittpunktbedingungen $\log |z_i| = k_i \cdot \log x$ nur betragsmäßig als $|z_i| = x^{k_i}$ gelten und somit die „Kopplung“ der Argumente der komplexen Zahlen verloren geht. Es können in der logarithmischen Welt folglich Schnittpunkte mit $\vec{k}\mathbb{R}$ entstehen, die zwar zu f , nicht jedoch zu χ gehören. [Lemma 4.9](#) wird sicherstellen, dass dies bei den für die Ausströmrates relevanten Punkten nicht der Fall ist.

Zuerst gilt es jedoch, den Logarithmierungsschritt zu formalisieren. Als Grundlage hierfür kann die Arbeit von Gelfand, Kapranov und Zelevinsky [[GKZ1994](#), 6.B.1.4] dienen, wo erstmals die Bezeichnung *Amöbe* für logarithmierte Nullstellenmengen von Polynomen eingeführt wurde.

Es bezeichne $\text{Log} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\log |x_1|, \dots, \log |x_n|).$$

Definition 4.6 ([[GKZ1994](#), 6.B.1.4]). Es sei $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ ein Polynom, und es sei $\mathcal{Z}_f := \{x \in \mathbb{T}^n \mid f(x) = 0\}$. Die Menge $\mathcal{A}_f := \text{Log}(\mathcal{Z}_f) \subset \mathbb{R}^n$ wird *AMÖBE* des Polynoms f genannt.

Amöbe

Die Bezeichnung *Amöbe* leitet sich vom Aussehen dieser Objekte im zweidimensionalen Fall ab. Die in [Abbildung 7](#) zu erkennenden „Tentakel“, die sich immer weiter verjüngen, sind eine Besonderheit im Zweidi-

mensionalen, da dort der Flächeninhalt einer Amöbe immer endlich ist, während ab Dimension drei das Volumen einer Amöbe im Allgemeinen unendlich ist.¹⁵

Satz 4.7 ([GKZ1994, Korollar 6.1.6]). *Es sei $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ ein Polynom und \mathcal{A}_f die zugehörige Amöbe. Dann sind die Zusammenhangskomponenten des Komplements \mathcal{A}_f^c jeweils offene konvexe Mengen.*

Von besonderem Interesse im Kontext von Ausströmraten sind reelle Polynome, die sich als charakteristische Polynome von nichtnegativen Matrizen mit Spektralradius kleiner als Eins ergeben.

Lemma 4.8. *Es sei $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ mit $r(M) \in (0, 1)$, es sei $E := \text{diag}(z_1, \dots, z_n)$, und es sei $f(z_1, \dots, z_n) := \det(E - M)$. Dann ist $\vec{0} \notin \mathcal{A}_f$.*

Beweis. Man nehme an, dass $\vec{0} \in \mathcal{A}_f$. Dann gibt es ein $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ aus \mathbb{C}^n mit $|x_i| = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$, welches $f(\vec{x}) = 0$ erfüllt. Es sei $D := \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$. Folglich ist $\det(DE - M) \stackrel{(1)}{=} 0$. Wegen $\det(DE - M) = \det(D) \cdot \det(E - D^{-1}M)$ und $\det(D) \neq 0$ folgt, dass $D^{-1}M$ den Eigenwert 1 hat. Dies widerspricht jedoch der sich aus [Satz A.8](#) ergebenden Aussage $r(D^{-1}M) \leq r(M) < 1$. \square

Es sei weiterhin $f(z_1, \dots, z_n) = \det(E - M)$ für $E := \text{diag}(z_1, \dots, z_n)$ und $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ mit $r(M) \in (0, 1)$. Man setze für $\vec{k} \in \mathbb{R}_{> 0}^n$

$$\varrho(\mathcal{A}_f, \vec{k}) := -\max \left\{ \eta \in \mathbb{R} \mid \eta \vec{k} \in \mathcal{A}_f \right\}.$$

Es ist gerechtfertigt, das Maximum anstelle des Supremums zu nehmen, da \mathcal{A}_f abgeschlossen ist. Man beachte, dass die betreffende Menge nicht leer ist, da aus [Gleichung \(11\)](#) bekannt ist, dass sie $\log \lambda$ enthält.

Lemma 4.9. *Es sei $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ mit $r(M) \in (0, 1)$, und es bezeichne E die Diagonalmatrix $\text{diag}(z_1, \dots, z_n)$. Ferner seien $f(z_1, \dots, z_n) := \det(E - M)$ und $\chi(z) := f(z^{k_1}, \dots, z^{k_n}) \in \mathbb{C}[z]$ mit $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$. Dann gilt*

$$\lambda := \exp \left(-\varrho(\mathcal{A}_f, \vec{k}) \right) = \max \{ |x| \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{C}, \chi(x) = 0 \}.$$

Beweis. Gemäß der Definition von λ gibt es ein $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ mit $\log |x_j| = k_j \cdot \log \lambda$ und $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Schreibt man die x_j in Polarkoordinaten als $\lambda^{k_j} e^{i\varphi_j}$, so lässt sich die Eigenschaft $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ als

$$\det \left(\text{diag} \left(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n} \right) \cdot \text{diag} \left(\lambda^{k_1}, \dots, \lambda^{k_n} \right) - M \right) = 0$$

¹⁵ Siehe Korollar 1 und die darauf folgende Bemerkung bei Passare und Rullgård [[PR2004](#)].

reformulieren. Folglich ist λ die betragsmäßig maximale Nullstelle von $\det(\text{diag}(z^{k_1}, \dots, z^{k_n}) - \text{diag}(e^{-i\varphi_1}, \dots, e^{-i\varphi_n}) \cdot M)$. Eine Anwendung von [Lemma 3.18](#) liefert, dass λ auch als die betragsmäßig maximale Nullstelle von $\det(z \cdot \text{id} - \bar{M})$ angesehen werden kann, wobei \bar{M} die von $\text{diag}(e^{-i\varphi_1}, \dots, e^{-i\varphi_n}) \cdot M$ gemäß [Gleichung \(10\)](#) auf Seite 36 abgeleitete Blockmatrix bezeichnet. Wenn nun \bar{M}' die von M abgeleitete Blockmatrix bezeichnet, so gilt der Zusammenhang $\bar{M} = D\bar{M}'$ mit einer Blockdiagonalmatrix D , bestehend aus den Blöcken $\text{diag}(e^{-i\varphi_j}, 1, \dots, 1)$ der Größe $k_j \times k_j$. Da \bar{M}' von M die Eigenschaft erbt, nichtnegativ zu sein, gibt es einen betragsmäßig maximalen Eigenwert λ' von \bar{M}' , der reell ist ([Satz A.4](#)). Wegen [Satz A.8](#) gilt $\lambda = r(\bar{M}) \leq r(\bar{M}') = \lambda'$ und da der Eigenwert λ' von \bar{M}' ebenso zu einem $\lambda' \bar{k} \in \mathcal{A}_f$ führt, muss $\lambda \geq \lambda'$ gelten, also $\lambda = \lambda'$. Da χ nach [Lemma 3.18](#) die Eigenwerte von \bar{M}' als Nullstellen hat, folgt die zu beweisende Aussage. \square

4.2 BEWEIS DER KONVEXITÄT VON ρ^{-1}

Es gelten die Voraussetzungen von [Theorem 4.2](#). Die Basistransformation $\theta : X \rightarrow X$ erfülle also [Annahme 1.14](#) und das Loch $A \subset X$ sei ein m -Zylinder. Es sei

$$\varphi = \lambda \cdot \sum_{C \in C_n} k_C \cdot \mathbb{1}_C \in Z_n$$

mit $n \geq m$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k_C \in \mathbb{N}$ für alle $C \in C_n$. Es bezeichne M_{op} die in [Abschnitt 3.2](#) hergeleitete Matrixdarstellung von $\mathcal{L}_{op} : Z_n \rightarrow Z_n$ und $\vec{k} \in \mathbb{N}^{|C_n|}$ den Vektor, dessen Einträge die Höhen k_C der Dachfunktion beschreiben. Nach [Satz A.10](#) gilt $r(M_{op}) < 1$. Falls $r(M_{op}) = 0$, so gilt $\rho(A, \varphi) = \infty$ für alle Dachfunktionen φ und die Konvexität folgt. Im Folgenden werde also $r(M_{op}) \in (0, 1)$ angenommen.

Es sei $f := \det(\text{diag}(z_C)_{C \in C_n} - M_{op})$. Aus [Lemma 3.18](#) und [Lemma 4.9](#) folgt, dass

$$\rho\left(\frac{1}{\lambda}\varphi\right) = \varrho\left(\mathcal{A}_f, \vec{k}\right). \quad (12)$$

Da $\vec{0} \notin \mathcal{A}_f$ nach [Lemma 4.8](#), wird durch $\vec{0}$ eine Zusammenhangskomponente O des Komplements \mathcal{A}_f^c der Amöbe ausgezeichnet. Aus der Definition von ϱ , und da [Gleichung \(12\)](#) impliziert, dass $\varrho \geq 0$, ergibt sich, dass

$$\begin{aligned} \varrho\left(\mathcal{A}_f, \vec{k}\right) &= -\max\left\{\eta \in \mathbb{R} \mid \eta \vec{k} \in \mathcal{A}_f\right\} \\ &= -\inf\left\{\eta \in \mathbb{R}_{\leq 0} \mid \eta \vec{k} \in O\right\} \\ &= \sup\left\{\eta \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \eta \vec{k} \in -O\right\}, \end{aligned}$$

woraus man durch Kehrwertbildung und Ausnutzung der positiven Homogenität von ρ^{-1} zuerst

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}\rho^{-1}(\varphi) &= \varrho^{-1}\left(\mathcal{A}_f, \vec{k}\right) \\ &= \inf\left\{\frac{1}{\eta} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \eta \vec{k} \in -O\right\} \\ &= \inf\left\{\eta \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \vec{k} \in \eta \cdot (-O)\right\} \end{aligned}$$

erhält und schließlich

$$\rho^{-1}(\varphi) = \varrho^{-1}\left(\mathcal{A}_f, \lambda \vec{k}\right) = \inf\left\{\eta \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \lambda \vec{k} \in \eta \cdot (-O)\right\}. \quad (13)$$

Eichfunktional

Die rechte Seite in [Gleichung \(13\)](#) ist das EICHFUNKTIONAL (auch: *Min-kowskifunktional*; englisch: *gauge*) der konvexen Menge $-O$ und als solches ist $\varrho^{-1}(\mathcal{A}_f, \vec{\varphi})$ eine konvexe Funktion von $\vec{\varphi} \in \mathbb{R}^n$.¹⁶ Die Gleichheit $\rho^{-1}(\varphi) = \varrho^{-1}(\mathcal{A}_f, \vec{\varphi})$ gilt zuerst nur für $\vec{\varphi} = \lambda \vec{k} \in \lambda \mathbb{N}^n$. Da die arithmetischen Zylinderfunktionen jedoch dicht in den Zylinderfunktionen liegen und die Ausströmrates stetig von derartigen Dachfunktionen abhängt, gilt die Gleichheit für allgemeine $\vec{\varphi} \in \mathbb{R}_{>0}^n$ und die ihnen entsprechenden $\varphi \in Z_n$.¹⁷ Die reziproke Ausströmrates ist folglich eine konvexe Funktion auf dem Raum der positiven Zylinderfunktionen zur Zylinderlänge n . Da diese Räume für $n \nearrow \infty$ eine aufsteigende Kette bilden, ist ρ^{-1} konvex auf dem Raum aller positiven Zylinderfunktionen.

Es seien nun $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ beschränkte und von Null weg beschränkte stetige Funktionen, wie in [Theorem 4.2](#) vorausgesetzt. Gemäß [Lemma 3.4](#) gibt es Folgen $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}'}$, $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}'}$ von Zylinderfunktionen, die gleichmäßig gegen φ beziehungsweise ψ konvergieren. Für die φ_k und ψ_k wurde bereits gezeigt, dass ρ^{-1} konvex ist. Es gilt also

$$\forall t \in [0, 1] : \quad \rho^{-1}(t \cdot \varphi_k + (1-t) \cdot \psi_k) \leq t \cdot \rho^{-1}(\varphi_k) + (1-t) \cdot \rho^{-1}(\psi_k)$$

für alle $k \in \mathbb{N}'$. Da auch $t \cdot \varphi_k + (1-t) \cdot \psi_k$ für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen $t \cdot \varphi + (1-t) \cdot \psi$ konvergiert, folgt aus [Satz 3.1](#), dass

$$\forall t \in [0, 1] : \quad \rho^{-1}(t \cdot \varphi + (1-t) \cdot \psi) \leq t \cdot \rho^{-1}(\varphi) + (1-t) \cdot \rho^{-1}(\psi)$$

gilt. Damit ist [Theorem 4.2](#) bewiesen.

¹⁶ Siehe [[Roc1972](#), Seiten 28,35] oder [[Wer2007](#), Kapitel III.2].

¹⁷ Die Einschränkung auf positive $\vec{\varphi}$ ist nötig, da die Ausströmrates nur für positive Dachfunktionen erklärt ist.

4.3 DIE AUSSTRÖMRATE ALS INDUZIERTER DRUCK

Die Eigenschaften der reziproken Ausströmrates wie Monotonie, Stetigkeit, Konvexität und Subadditivität erinnern an die Eigenschaften von Druckfunktionen.¹⁸ Tatsächlich lässt sich die Ausströmrates als ein induzierter Druck im Sinne von Jaerisch, Kesseböhmer und Lamei [JKL2014] auffassen. Eine derartige Formulierung der Ausströmrates ist insofern von Interesse, als dass sie die Perspektive eröffnet, gewisse Eigenschaften der Ausströmrates in allgemeineren Situationen (beispielsweise Gibbsmaße oder unendliches Alphabet) als dem in dieser Arbeit primär untersuchten Fall von Markovshifts über einem endlichen Alphabet zu betrachten.

Die folgende Definition des induzierten Drucks stammt aus [JKL2014, Definition 1.1]. Die hier verwendete Symbolik weicht jedoch leicht von der in jener Arbeit verwendeten ab, damit es nicht zu Verwechslungen mit den in dieser Arbeit bereits etablierten Bedeutungen gewisser Symbole kommt.

Definition 4.10. Es sei (X, θ) mit $X := S_P^{\mathbb{N}}$ ein einseitiger Teilshift auf einem höchstens abzählbaren Alphabet S mit Übergangsmatrix P . Für Funktionen $p, \varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \geq 0$ und eine Menge $\mathcal{C} \subset \Sigma_P^*$ ist der φ -INDUZIERTER DRUCK VON p (bezüglich \mathcal{C}) für $\eta > 0$ definiert als

induzierter Druck

$$P_\varphi(p, \mathcal{C}) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \cdot \log \sum_{\substack{w \in \mathcal{C} \\ t - \eta < S_w \varphi \leq t}} \exp(S_w p), \quad (14)$$

wobei $S_w p := \sup_{x \in [w]} \sum_{k=0}^{|w|-1} p \circ \theta^k(x)$ und $|w|$ die Länge des Zylinders ist.

Länge eines Zylinders

Bemerkung 4.11. Nach [JKL2014] ist der induzierte Druck unabhängig von der Wahl des $\eta > 0$.

Durch geeignete Wahl von p und \mathcal{C} kann für Halbströmungen über einer geeigneten Basis – beispielsweise einem Markovshift auf einem endlichen Alphabet – die Ausströmrates zu einem Loch A bezüglich einer Dachfunktion φ als induzierter Druck beschrieben werden.

Annahme 4.12. Es sei (X, θ) mit $X := S_P^{\mathbb{N}}$ ein einseitiger Teilshift auf einem höchstens abzählbaren Alphabet S mit Übergangsmatrix P . Der Teilshift sei ausgestattet mit einem invarianten Wahrscheinlichkeitsmaß μ , zu dem es eine Funktion $p : S_P^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ und ein $K > 0$ gibt, sodass für alle $w \in \Sigma_P^*$ gilt

$$K^{-1} \leq \frac{e^{S_w p}}{\mu([w])} \leq K.$$

¹⁸ Siehe beispielsweise Walters [Wal2000, §9.2].

Bemerkung 4.13. [Annahme 4.12](#) wird insbesondere von Markovshifts auf einem endlichen Alphabet erfüllt ([Annahme 1.14](#)), wenn man p als

$$p : S_P^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, \dots) \mapsto \log p_{x_1 x_2}$$

wählt. Denn gemäß der Definition des Maßes μ für den Markovshift gilt für alle $w \in \Sigma_p^*$, dass

$$e^{S_w p} = \prod_{l=1}^{k-1} p_{w_l w_{l+1}} \cdot \sup_{s \in S} p_{w_k s} = \frac{\sup_{s \in S} p_{w_k s}}{\mu([w_1])} \cdot \mu([w]),$$

was, da es sich in der betrachteten Situation um ein endliches Alphabet handelt, impliziert, dass es ein $K > 0$ mit

$$K^{-1} \leq \frac{e^{S_w p}}{\mu([w])} \leq K \quad (15)$$

für alle $w \in \Sigma_p^*$ gibt.

Satz 4.14. *Es sei [Annahme 4.12](#) erfüllt, und es gebe ein $m \in \mathbb{N}$, sodass für das Loch $A \subset X$ gilt $A \in \sigma(C_m)$.¹⁹ Ferner sei $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine positive, beschränkte und von Null weg beschränkte, messbare Dachfunktion. Mit*

$$C := \left\{ w \in \Sigma_p^* \mid |w| \geq m \text{ und } \forall 0 \leq k \leq |w| - m : \theta^k([w]) \cap A = \emptyset \right\} \quad (16)$$

gilt, sofern die Ausströmrage $\rho(A, \varphi)$ existiert, dass

$$\mathcal{P}_\varphi(p, C) = -\rho(A, \varphi).$$

Beweis. Zuerst werde festgehalten, dass man die Menge C auch als

$$\begin{aligned} C &= \left\{ w \in \Sigma_p^* \mid |w| \geq m \text{ und } \forall 0 \leq k \leq |w| - m : \theta^k([w]) \cap A = \emptyset \right\} \\ &= \left\{ w \in \Sigma_p^* \mid |w| \geq m \text{ und } \forall x \in [w] : N_A(x) > |w| - m \right\} \\ &= \left\{ w \in \Sigma_p^* \mid |w| \geq m \text{ und } \exists x \in [w] : N_A(x) > |w| - m \right\} \end{aligned}$$

beschreiben kann. Wegen [Gleichung \(15\)](#) gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \cdot \log K^{-1} + \frac{1}{t} \cdot \log \sum_{\substack{w \in C \\ t-\eta < S_w \varphi \leq t}} \mu([w]) \\ & \leq \frac{1}{t} \cdot \log \sum_{\substack{w \in C \\ t-\eta < S_w \varphi \leq t}} e^{S_w p} \\ & \leq \frac{1}{t} \cdot \log K + \frac{1}{t} \cdot \log \sum_{\substack{w \in C \\ t-\eta < S_w \varphi \leq t}} \mu([w]). \end{aligned}$$

¹⁹ Dies bedeutet, dass sich A als Vereinigung von m -Zylindern schreiben lässt.

Da die Terme $1/t \cdot \log K^{-1}$ und $1/t \cdot \log K$ für $t \rightarrow \infty$ gegen Null streben, können diese bei der Grenzwertuntersuchung vernachlässigt werden. Ferner kann im Folgenden ohne Einschränkung angenommen werden, dass $t \geq m \cdot \sup \varphi$ gilt. Wegen [Bemerkung 4.11](#) kann außerdem ohne Einschränkung vorausgesetzt werden, dass $\eta > \sup \varphi$. Man hat

$$\begin{aligned}
 & \bigcup_{\substack{w \in \mathcal{C} \\ t-\eta < S_w \varphi \leq t}} [w] \\
 = & \left\{ x \in X \mid \exists w \in \Sigma_P^* : \begin{array}{l} x \in [w], t - \eta < S_w \varphi \leq t, |w| \geq m, \\ \forall y \in [w] : N_A(y) > |w| - m \end{array} \right\} \\
 \subset & \left\{ x \in X \mid \exists w \in \Sigma_P^* : \begin{array}{l} x \in [w], t - \eta < S_w \varphi, \\ |w| \geq m, N_A(x) > |w| - m \end{array} \right\} \\
 \subset & \left\{ x \in X \mid \exists w \in \Sigma_P^* : \begin{array}{l} x \in [w], |w| \geq N_{t-\eta-\sup \varphi}(x), \\ |w| \geq m, N_A(x) > |w| - m \end{array} \right\} \\
 \subset & \{ x \in X \mid \exists w \in \Sigma_P^* : x \in [w], N_A(x) \geq N_{t-\eta-\sup \varphi}(x) - m \} \\
 = & \{ x \in X \mid N_A(x) \geq N_{t-\eta-\sup \varphi}(x) - m \} \\
 \subset & \left\{ x \in X \mid N_A(x) \geq N_{t-\eta-(m+1) \cdot \sup \varphi}(x) \right\}
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 & \bigcup_{\substack{w \in \mathcal{C} \\ t-\eta < S_w \varphi \leq t}} [w] \\
 = & \left\{ x \in X \mid \exists w \in \Sigma_P^* : \begin{array}{l} x \in [w], t - \eta < S_w \varphi \leq t, |w| \geq m, \\ \exists y \in [w] : N_A(y) > |w| - m \end{array} \right\} \\
 \stackrel{(\star)}{\supset} & \left\{ x \in X \mid \exists w \in \Sigma_P^* : \begin{array}{l} x \in [w], |w| = N_t(x) - 1, |w| \geq m, \\ \exists y \in [w] : N_A(y) > |w| - m \end{array} \right\} \\
 \supset & \left\{ x \in X \mid \exists w \in \Sigma_P^* : \begin{array}{l} x \in [w], |w| = N_t(x) - 1, \\ |w| \geq m, N_A(x) > |w| - m \end{array} \right\} \\
 = & \left\{ x \in X \mid \exists w \in \Sigma_P^* : \begin{array}{l} x \in [w], |w| = N_t(x) - 1, \\ N_t(x) - 1 \geq m, N_A(x) \geq N_t(x) - m \end{array} \right\} \\
 \stackrel{(\star\star)}{=} & \{ x \in X \mid N_A(x) \geq N_t(x) - m \} \\
 \supset & \left\{ x \in X \mid N_A(x) \geq N_{t-m \cdot \inf \varphi}(x) \right\}.
 \end{aligned}$$

Für (\star) wird genutzt, dass $t - \eta \leq t - \sup \varphi \leq S_{N_t-1}(x) < t$ und für $(\star\star)$ wird verwendet, dass wegen $t \geq m \cdot \sup \varphi$ die Bedingung $N_t(x) - 1 \geq m$

automatisch erfüllt ist, und es außerdem für jedes $x \in X$ ein $w \in \Sigma_p^*$ mit $|w| = N_t(x) - 1$ gibt, sodass diese beiden Bedingungen ausgelassen werden können.

Damit ergeben sich die Abschätzungen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \cdot \log \sum_{\substack{w \in \mathcal{C} \\ t-\eta < S_w \varphi \leq t}} \mu([w]) \\ & \leq \frac{1}{t} \cdot \log \left(\left\lceil \frac{\eta}{\inf \varphi} \right\rceil \cdot \mu \left(\left\{ x \in X \mid N_A \geq N_{t-\eta-(m+1) \cdot \sup \varphi} \right\} \right) \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \cdot \log \sum_{\substack{w \in \mathcal{C} \\ t-\eta < S_w \varphi \leq t}} \mu([w]) \\ & \geq \frac{1}{t} \cdot \log \mu \left(\left\{ x \in X \mid N_A(x) \geq N_{t-m \cdot \inf \varphi}(x) \right\} \right), \end{aligned}$$

indem man berücksichtigt, dass in der Summe ein Punkt der Vereinigung mindestens einmal und höchstens $\lceil \eta / \inf \varphi \rceil$ -mal gezählt wird. Eine Anwendung von [Lemma 2.12](#) liefert nun, dass $-\rho(A, \varphi)$ sowohl eine obere als auch eine untere Schranke für $\mathcal{P}_\varphi(p, \mathcal{C})$ ist, woraus die zu zeigende Aussage folgt. \square

Die durch [Gleichung \(14\)](#) gegebene Definition des induzierten Drucks ist nicht die einzig mögliche Formulierung. [\[JKL2014\]](#) enthält einige in bestimmten Situationen äquivalente Beschreibungen. Von besonderem Interesse ist hierbei folgende Formulierung:

Lemma 4.15 ([\[JKL2014, Corollary 2.2\]](#)). *Es seien $p, \varphi : S_p^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, wobei φ positiv und von Null weg beschränkt sei. Dann gilt für $\mathcal{C} \subset \Sigma_p^*$:*

$$\mathcal{P}_\varphi(p, \mathcal{C}) = \inf \{ \beta \in \mathbb{R} \mid \mathcal{P}_1(p - \beta \varphi, \mathcal{C}) \leq 0 \}. \quad (17)$$

Diese besondere Beschreibung des induzierten Drucks erlaubt einen alternativen Beweis der Sublinearität der reziproken Ausströmrates ([Korollar 4.3](#)), indem gezeigt wird, dass

$$\varphi \mapsto \frac{1}{\mathcal{P}_\varphi(p, \mathcal{C})}$$

superadditiv ist.

Satz 4.16. *Es sei [Annahme 4.12](#) erfüllt, und es sei $\mathcal{C} \subset \Sigma_p^*$. Zudem seien $\varphi_1, \varphi_2 : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschränkte und von Null weg beschränkte Funktionen mit $-\infty < \mathcal{P}_{\varphi_i}(p, \mathcal{C}) < 0$ für $i = 1, 2$. Dann gilt*

$$\frac{1}{\mathcal{P}_{\varphi_1 + \varphi_2}(p, \mathcal{C})} \geq \frac{1}{\mathcal{P}_{\varphi_1}(p, \mathcal{C})} + \frac{1}{\mathcal{P}_{\varphi_2}(p, \mathcal{C})}.$$

Beweis. Zur besseren Lesbarkeit der Gleichungen werde

$$\begin{aligned} a_1 &:= \mathcal{P}_{\varphi_1}(p, \mathcal{C}) \\ a_2 &:= \mathcal{P}_{\varphi_2}(p, \mathcal{C}) \end{aligned}$$

geschrieben. Außerdem setze man

$$x := \frac{1}{a_1^{-1} + a_2^{-1}}.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{\mathbb{1}}(p - x(\varphi_1 + \varphi_2), \mathcal{C}) \\ &= \mathcal{P}_{\mathbb{1}}(p - x\varphi_1 - x\varphi_2, \mathcal{C}) \\ &= \mathcal{P}_{\mathbb{1}}\left(p - \frac{x}{a_1} \cdot a_1\varphi_1 - \frac{x}{a_2} \cdot a_2\varphi_2, \mathcal{C}\right) \\ &= \mathcal{P}_{\mathbb{1}}\left(p - \frac{x}{a_1} \cdot a_1\varphi_1 - \left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \cdot a_2\varphi_2, \mathcal{C}\right) \\ &= \mathcal{P}_{\mathbb{1}}\left(\frac{x}{a_1} \cdot (p - a_1\varphi_1) + \left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \cdot (p - a_2\varphi_2), \mathcal{C}\right) \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{x}{a_1} \cdot \mathcal{P}_{\mathbb{1}}(p - a_1\varphi_1, \mathcal{C}) + \left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \cdot \mathcal{P}_{\mathbb{1}}(p - a_2\varphi_2, \mathcal{C}) \\ &= 0 + 0, \end{aligned}$$

wobei sich (*) aus der Konvexitätseigenschaft ([\[JKL2014, Proposition 2.1\]](#)) des induzierten Drucks ergibt. Folglich impliziert [Lemma 4.15](#), dass

$$x \geq \mathcal{P}_{\varphi_1 + \varphi_2}(p, \mathcal{C})$$

und somit

$$\frac{1}{\mathcal{P}_{\varphi_1}(p, \mathcal{C})} + \frac{1}{\mathcal{P}_{\varphi_2}(p, \mathcal{C})} \leq \frac{1}{\mathcal{P}_{\varphi_1 + \varphi_2}(p, \mathcal{C})}.$$

□

Korollar 4.17. *Wenn die Voraussetzungen von [Satz 4.14](#) erfüllt sind, ist die reziproke Ausströmratesublinear.*

Beweis. Satz 4.14 gibt die Formulierung der Ausströmrage als induzierter Druck. Die in Satz 4.16 gezeigte Superadditivitätseigenschaft liefert somit die Subadditivität der reziproken Ausströmrage, sodass man zusammen mit der bereits bekannten positiven Homogenität der Ausströmrage die Sublinearität erhält.²⁰ \square

²⁰ Alternativ kann man ausnutzen, dass die positive Homogenität des reziproken induzierten Drucks leicht aus der Definition zu erkennen ist.

EXPLIZITE ERGEBNISSE ZUR AUSSTRÖMRATE IN EINIGEN EINFACHEN SITUATIONEN

5.1 ASYMPTOTISCHES VERHALTEN DER AUSSTRÖMRATE FÜR EINFACHE ZYLINDERFUNKTIONEN

Bereits aus der Definition der Ausströmrates ρ ergibt sich unmittelbar, dass ρ^{-1} positiv homogen ist. In [Kapitel 4](#) wurde außerdem für den Fall eines Markovshifts als Basistransformation die Sublinearität der reziproken Ausströmrates gezeigt. Neben diesen allgemeinen Ergebnissen ist es jedoch wünschenswert, in gewissen konkreten Situationen das Verhalten von ρ^{-1} bei Veränderungen der Dachfunktion detaillierter beschreiben zu können.

Es sei im Folgenden [Annahme 1.15](#) erfüllt, das Loch $A \subset X$ sei eine Vereinigung von m -Zylindern und die Dachfunktion φ sei von der Gestalt

$$\varphi = \sum_{C \in C_n} a_C \cdot \mathbb{1}_C \in Z_n$$

für $n \geq m$ und mit $a_C \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle $C \in C_n$. Da gemäß der Ergebnisse aus [Abschnitt 3.2](#) die Ausströmrates implizit durch die betragsmäßig maximale Nullstelle eines Polynoms bestimmt wird, dessen Exponenten über die a_C von φ abhängen, kann der Zusammenhang zwischen Dachfunktion und Ausströmrates schnell sehr kompliziert werden. Wenn man sich jedoch darauf beschränkt, nur ein einziges a_C zu variieren, ist die Situation einfach zu handhaben.

Man fixiere ein $D \in C_n$. Aus [Lemma 3.18](#) und [Bemerkung 3.19](#) folgt, dass sich das relevante Polynom f_{a_D} mittels einer den Transferoperator des offenen Systems (bezüglich der Basistransformation) beschreibenden Matrix M_{op} als

$$f_{a_D}(z) = \det \left(\text{diag} (z^{a_C})_{C \in C_n} - M_{op} \right) = z^{a_D} \cdot g_D(z) + h_D(z) \quad (18)$$

schreiben lässt, wobei die Polynome g_D und h_D nur von D , aber nicht von a_D abhängen. Wenn $\rho = \rho(A, \varphi)$ die Ausströmrates bezüglich φ bezeichnet, so ist die zugehörige Nullstelle von f_{a_D} durch $e^{-\rho}$ gegeben. Sofern $g_D(e^{-\rho}) \neq 0$ und folglich auch $h_D(e^{-\rho}) \neq 0$, ergibt sich

$$a_D = -\frac{1}{\rho} \cdot \log \left(-\frac{h_D(e^{-\rho})}{g_D(e^{-\rho})} \right) \quad (19)$$

und somit ein expliziter Zusammenhang zwischen der Ausströmrates und dem Funktionswert von φ auf D . Ist dagegen $g_D(e^{-\rho}) = 0$ und folglich auch $h_D(e^{-\rho}) = 0$, so ist $e^{-\rho}$ eine Nullstelle von

$$f_{a'_D}(z) := z^{a'_D} \cdot g(z) + h(z)$$

für beliebiges $a'_D \neq 0$. Man ist versucht, zu folgern, dass die Ausströmrates in dieser Situation unabhängig vom Wert von φ auf D ist, doch dies ist nicht zwangsläufig der Fall. Zwar ist $e^{-\rho}$ – hierbei ist ρ weiterhin die Ausströmrates zu a_D – dann eine Nullstelle von $f_{a'_D}$ für beliebiges $a'_D \neq 0$, jedoch kann es durchaus von a'_D abhängen, ob $e^{-\rho}$ die betragsmäßig maximale Nullstelle von $f_{a'_D}$ ist.

Beispiel 5.1. Wenn die ausgewählte Zylindermenge $D \in C_n$ eine Teilmenge des Lochs A ist, so ist nach [Satz 2.6 \(D\)](#) für die Ausströmrates nicht von Belang, welche Funktionswerte φ auf D annimmt.

Beispiel 5.2. Man betrachte den Markovshift aus [Beispiel 1.12](#). Als Loch wähle man den Zylinder $[01]$ und die Dachfunktion sei

$$\varphi_a = \mathbb{1}_{[00]} + \mathbb{1}_{[01]} + \mathbb{1}_{[10]} + a \cdot \mathbb{1}_{[11]}.$$

Das zugehörige Polynom ist

$$\begin{aligned} f_a(z) &= z^a \cdot \left(z^3 - \frac{1}{3}z^2 \right) - \frac{3}{4}z^3 + \frac{1}{4}z^2 \\ &= \frac{1}{12} \cdot z^2 \cdot (3z - 1) \cdot (4z^a - 3) \end{aligned}$$

und für die reziproke Ausströmrates in Abhängigkeit von a erhält man den in [Abbildung 8](#) dargestellten Zusammenhang. Man erkennt in der Abbildung und anhand der Gestalt von f_a , dass durch das Einführen des Lochs $[01]$ das System in zwei Teile zerfällt. Dies rührt daher, dass durch die Wahl dieses Lochs der Übergang von 0 zu 1 im System gewissermaßen verboten wird. Für $a = \log(3/4) / \log(1/3) \approx 0,26$ hat f_a eine doppelte Nullstelle in $e^{-\rho}$ und nur eine davon hängt von a ab. Man könnte beiden Teilen jeweils eine eigene Ausströmrates zuordnen, indem man das Ausströmen der Masse aus $[00] \cup [10]$ und aus $[11]$ gesondert betrachtet; als Gesamtsystem ist es letztlich jedoch der langsamere Teil, der die Ausströmrates bestimmt, sodass für kleine a nur die unabhängig von a vorhandene Nullstelle $1/3$ wirksam wird.

Um zu verhindern, dass ein solches Zerfallen und damit der Verlust der Differenzierbarkeit und auch der Gültigkeit von [Gleichung \(19\)](#) für

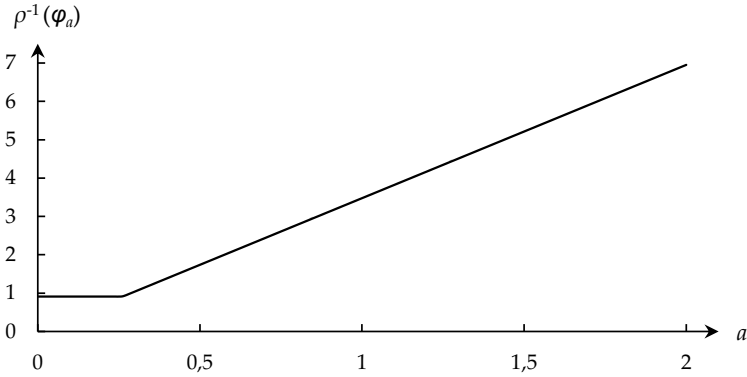


Abbildung 8: Reziproke Ausströmraten zu den φ_a aus [Beispiel 5.2](#)

ein bestimmtes a_D auftritt, genügt es, zu fordern, dass $g_D(e^{-\rho}) \neq 0$ für dieses a_D . Diese Bedingung ist jedoch nicht immer leicht zu überprüfen, da es sehr aufwendig sein kann, g_D explizit zu bestimmen. Sofern aber die Dachfunktion φ abgesehen von a_D nur Funktionswerte auf einem Gitter $\lambda\mathbb{N}$ annimmt, lässt sich eine hinreichende Bedingung auf Grundlage der Matrixdarstellung des Transferoperators des offenen Systems bezüglich der Basistransformation angeben.

Zuvor wird die betrachtete Situation noch einmal zusammengefasst.

Annahme 5.3. Es sei [Annahme 1.15](#) erfüllt, das Loch $A \subset X$ sei eine Vereinigung von m -Zylindern mit $m \leq n$, es sei $D \in C_n$ mit $D \cap A = \emptyset$, es sei $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, und es sei $\varphi_{a_D} = \sum_{C \in C_n} a_C \cdot \mathbb{1}_C \in Z_n$ mit $a_C \in \mathbb{N}$ für $C \neq D$. Es sei M die Matrixdarstellung des Transferoperators $\mathcal{L} : Z_n \rightarrow Z_n$ wie in [Abschnitt 3.1](#), es seien f_{a_D} , g_D und h_D wie in [Gleichung \(18\)](#), und es sei $\rho := \rho(A, \varphi_{a_D})$.

Lemma 5.4. Es sei [Annahme 5.3](#) erfüllt. Sofern die Untermatrix $[M]_A$ von M , die aus M durch das Streichen aller zu A gehörenden Zeilen und Spalten entsteht,²¹ irreduzibel ist, gilt $g_D(e^{-\rho}) \neq 0$.

Bemerkung 5.5. Wenn die Matrix $[M]_A$ aus [Lemma 5.4](#) irreduzibel ist, heißt das System MIT LOCH A IRREDUZIBEL.

mit Loch
irreduzibel

²¹ Die Schreibweise $[\cdot]_A$ bedeutet hierbei in Analogie zur Schreibweise für Hauptuntermatrizen, dass alle zum Loch A gehörenden Zeilen und Spalten aus der Matrix gestrichen werden.

Beweis. Aus [Gleichung \(18\)](#) und der Tatsache, dass in M_{op} alle zu A gehörenden Zeilen Null gesetzt wurden, kann man folgern, dass sich

$$\tilde{g}_D(z) := \det \left(\left[\text{diag}(z^{a_c})_{C \in C_n} - M \right]_{A \cup D} \right)$$

von $g_D(z)$ nur um eine Potenz von z und gegebenenfalls das Vorzeichen unterscheidet. Auf diese Weise geht nur Information über die Vielfachheit der Nullstelle Null verloren, aber da $e^{-\rho} \neq 0$, ist dies nicht von Bedeutung für die Frage, ob $g_D(e^{-\rho}) \neq 0$.

Da die reziproke Ausströmrates positiv homogen von der Dachfunktion abhängt, kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass $\lambda = 1$. Somit kann mittels [Lemma 3.18](#) und eines $\epsilon \in \{-1, 1\}$ auch

$$\tilde{g}_D(z) = \epsilon \cdot \det \left([z \cdot \text{id} - \overline{M}]_{\pi_1^{-1}(A \cup D)} \right)$$

geschrieben werden. $\epsilon \cdot \tilde{g}_D$ ist also gleich dem charakteristischen Polynom einer Hauptuntermatrix von $[\overline{M}]_{\pi_1^{-1}(A)}$, was eben jene Matrix ist, die man aus M_A durch [Lemma 3.18](#) erhält. Da sich die Irreduzibilität von $[M]_A$ auf $[\overline{M}]_{\pi_1^{-1}(A)}$ überträgt, kann man nun mittels [Satz A.6](#) schließen, dass die betragsmäßig maximale Nullstelle von \tilde{g}_D , und somit auch jene von g_D , betragsmäßig echt kleiner ist als der Spektralradius von $[\overline{M}]_{\pi_1^{-1}(A)}$, der mit dem von \overline{M}_{op} übereinstimmt und $e^{-\rho}$ beträgt. Folglich muss $g_D(e^{-\rho}) \neq 0$ gelten. \square

Als eine Folgerung aus [Lemma 5.4](#) ergibt sich, dass der durch [Gleichung \(19\)](#) gegebene Zusammenhang zwischen a_D und ρ streng monoton ist, da bekannt ist, dass die Umkehrfunktion – welches gerade die Ausströmrates in Abhängigkeit von der durch a_D bestimmten Dachfunktion ist – existiert und monoton und stetig ist.

Beispiel 5.6. Man betrachte den Markovshift aus [Beispiel 1.12](#). Als Loch wähle man den Zylinder $[010]$ und die Dachfunktion sei

$$\varphi_a = \mathbb{1}_{[0]} + \mathbb{1}_{[10]} + \mathbb{1}_{[110]} + a \cdot \mathbb{1}_{[111]}.$$

Das zugehörige Polynom ist

$$f_a(z) = z^a \cdot \left(z^7 - \frac{1}{3}z^6 \right) - \frac{3}{4}z^7 + \frac{1}{4}z^6$$

und für die Ausströmrates in Abhängigkeit von a erhält man den in [Abbildung 9](#) dargestellten Zusammenhang.

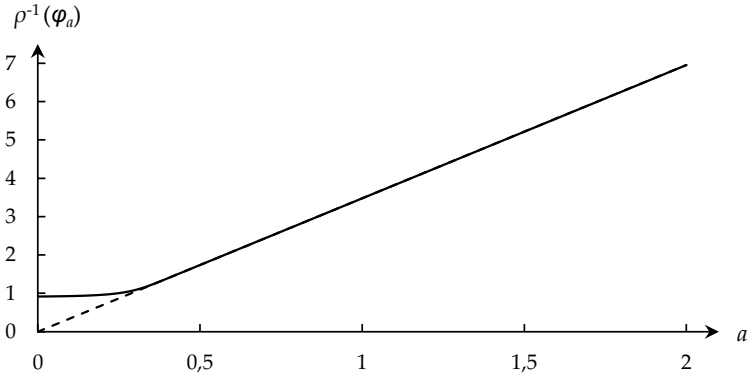


Abbildung 9: Reziproke Ausströmraten zu den φ_a aus [Beispiel 5.6](#) und lineare Approximation gemäß [Gleichung \(20\)](#)

Im Folgenden werde vorausgesetzt, dass das System mit Loch irreduzibel ist.

Die Grafik zu [Beispiel 5.6](#) legt die Vermutung nahe, dass sich für $a_D \rightarrow \infty$ die reziproke Ausströmrates asymptotisch wie eine affin lineare Funktion von a_D verhält. Aus der Monotonieeigenschaft der Ausströmrates folgt, dass zunehmendes a_D zu abnehmendem $\rho(\varphi_{a_D})$ führt. Das folgende Lemma zeigt, dass man in der Situation von [Lemma 5.4](#) eine noch stärkere Aussage über das Verhalten der Ausströmrates für wachsendes a_D treffen kann.

Lemma 5.7. *Es sei [Annahme 5.3](#) erfüllt, und das System mit Loch A sei irreduzibel. Dann gilt $\lim_{a_D \rightarrow \infty} \rho(\varphi_{a_D}) = 0$.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $a_D \cdot \rho(\varphi_{a_D})$ für $a_D \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt. Da das System mit Loch A irreduzibel ist und $D \cap A = \emptyset$, gibt es einen periodischen Punkt $x_0 \in D$, dessen Bahn unter θ die Menge A nicht schneidet. Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass x_0 von der Gestalt $x_0 = (w, w, w \dots)$ für ein Wort $w \in \Sigma_p^*$ mit $[w] \subset D$ ist. Dies erlaubt die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \rho(A, \varphi_{a_D}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{ka_D} \log \bar{\mu} \left\{ (x, s) \in \bar{X} \mid \forall \tau \in [0, ka_D] : \Phi_t(x, s) \notin \pi_1^{-1}(A) \right\} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{ka_D} \log \left(a_D \cdot \mu \left(\underbrace{[w, \dots, w]}_{k+1\text{-mal}} \right) \right) =: \frac{1}{a_D} \cdot K_0 \end{aligned}$$

für eine Konstante $K_0(x_0) > 0$, da man aufgrund der Konstruktion des Maßes weiß, dass

$$\mu(\underbrace{[w, \dots, w]}_{k+1\text{-mal}}) = K \cdot \zeta^k$$

für gewisse Konstanten $K > 0$, $\zeta \in (0, 1)$. Somit gilt $a_D \cdot \rho(A, \varphi_{a_D}) \leq K_0$ und die zu beweisende Aussage folgt. \square

Lemma 5.8. *Es sei [Annahme 5.3](#) erfüllt. Dann gilt $\liminf_{a_D \rightarrow \infty} a_D \cdot \rho(\varphi_{a_D}) > 0$.*

Beweis. Zur Verkürzung der Notation setze man $\rho_k := \rho(A, \varphi_{a_{D,k}})$. Man nehme an, dass es eine aufsteigende Folge $(a_{D,k})_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathbb{N}}$ gibt, für die $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{D,k} \cdot \rho_k = 0$ gilt. Gemäß [Gleichung \(18\)](#) gilt

$$e^{-a_{D,k} \cdot \rho_k} \cdot g_D(e^{-\rho_k}) + h_D(e^{-\rho_k}) = 0$$

für alle k , sodass sich im Grenzwert $0 = g_D(1) + h_D(1) = \det(\text{id} - M_{op})$ ergibt. Da jedoch bekannt ist, dass 1 kein Eigenwert von M_{op} ist, kann dies nicht sein und folglich muss $\liminf_{a_D \rightarrow \infty} a_D \cdot \rho(\varphi_{a_D}) > 0$ gelten. \square

Lemma 5.9. *Es sei [Annahme 5.3](#) erfüllt, und das System mit Loch A sei irreduzibel. Dann gilt $g_D(1) \neq 0$, $h_D(1) \neq 0$ und $g_D(1) \neq -h_D(1)$.*

Beweis. Aus dem Beweis zu [Lemma 5.4](#) folgt, dass $g_D(1) \neq 0$. Aus dem Beweis zu [Lemma 5.7](#) ergibt sich, dass es eine Konstante $K > 0$ gibt, sodass $K^{-1} \leq a_D \cdot \rho(\varphi_{a_D}) \leq K$ für alle $a_D > 0$. Man schreibe verkürzt $\rho_{a_D} = \rho(\varphi_{a_D})$. Gemäß [Gleichung \(18\)](#) gilt

$$e^{-a_D \cdot \rho_{a_D}} \cdot g_D(e^{-\rho_{a_D}}) = -h_D(e^{-\rho_{a_D}})$$

für alle $a_D > 0$. Da nach [Lemma 5.7](#) $\rho(\varphi_{a_D})$ für $a_D \rightarrow \infty$ gegen Null strebt und man weiß, dass $g_D(1) \neq 0$, erhält man

$$0 < \left| e^{-K} \cdot g_D(1) \right| \leq |h_D(1)| \leq \left| e^{-K^{-1}} \cdot g_D(1) \right| < |g_D(1)|,$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Da nun sichergestellt ist, dass der Logarithmsterm in [Gleichung \(19\)](#) auch für $\rho = 0$ wohldefiniert ist, kann man diesen für ρ nahe Null näher untersuchen, indem man eine Taylorapproximation in $\rho = 0$ heranzieht.

*Landau-
schreibweise*

Notiz 5.10. Die LANDAUSCHREIBWEISE²² $f(x) = o(g(x))$ für $x \rightarrow a$ bedeutet, dass $\lim_{x \rightarrow a} f(x) / g(x) = 0$.

²² Siehe beispielsweise [[AE2006](#), Kapitel IV.3].

Man erhält

$$\begin{aligned}
 a_D(\rho) &= -\frac{1}{\rho} \cdot \log\left(-\frac{h_D(e^{-\rho})}{g_D(e^{-\rho})}\right) \\
 &= -\frac{1}{\rho} \cdot \left(\log\left(-\frac{h_D(1)}{g_D(1)}\right) + \left(\frac{h'_D(1)}{h_D(1)} - \frac{g'_D(1)}{g_D(1)}\right) \cdot (-\rho) + o(\rho)\right) \\
 &= \log\left(-\frac{g_D(1)}{h_D(1)}\right) \cdot \rho^{-1} + \frac{h'_D(1)}{h_D(1)} - \frac{g'_D(1)}{g_D(1)} + o(1).
 \end{aligned}$$

$o(\cdot)$ bezieht sich hierbei auf $\rho \rightarrow 0$. Da $\log(-g_D(1)/h_D(1)) \neq 0$ nach [Lemma 5.9](#), lässt sich dieser Zusammenhang nutzen, um eine lineare Approximation von ρ^{-1} zu formulieren.

Satz 5.11. *Es sei [Annahme 5.3](#) erfüllt und das System mit Loch A sei irreduzibel. Dann gilt*

$$\rho^{-1}(\varphi_{a_D}) = \frac{a_D}{\log\left(-\frac{g_D(1)}{h_D(1)}\right)} - \frac{\frac{h'_D(1)}{h_D(1)} - \frac{g'_D(1)}{g_D(1)}}{\log\left(-\frac{g_D(1)}{h_D(1)}\right)} + o(1), \quad (20)$$

wobei sich das $o(1)$ auf $a_D \rightarrow \infty$ bezieht, da $\rho(a_D) \rightarrow 0$ für $a \rightarrow \infty$.²³

In [Abbildung 9](#) sind sowohl die reziproken Ausströmraten zu [Beispiel 5.6](#) als auch die lineare Approximation gemäß [Satz 5.11](#) dargestellt.

²³ Siehe [Lemma 5.7](#).

5.2 DIE ABLEITUNG DER AUSSTRÖMRATE

Es werde weiterhin vorausgesetzt, dass [Annahme 1.15](#) erfüllt ist, das Loch A ein m -Zylinder ist und die Dachfunktion aus einem Z_n stammt. Sofern das System mit Loch A irreduzibel ist, kann man die umkehrbare Funktion aus [Gleichung \(19\)](#) benutzen, um die partiellen Ableitungen der (reziproken) Ausströmrates zu ermitteln.²⁴ Für den Wert von φ über dem Loch ist [Gleichung \(19\)](#) nicht anwendbar; aus [Satz 2.6](#) ist jedoch bekannt, dass ρ nicht vom Funktionswert über dem Loch abhängt, woraus folgt, dass die entsprechende partielle Ableitung Null ist. Da die sich aus [Gleichung \(19\)](#) ergebenden partiellen Ableitungen offenkundig stetig sind, ist die Funktion insgesamt differenzierbar und man kann den Gradienten angeben. Ohne explizit rechnen zu müssen, kann man bereits feststellen, dass aufgrund der positiven Homogenität der reziproken Ausströmrates gilt

$$\langle \nabla \rho^{-1}(\vec{\varphi}), \vec{\varphi} \rangle = \rho^{-1}(\varphi)$$

und

$$\forall \lambda > 0: \quad \nabla \rho^{-1}(\lambda \vec{\varphi}) = \nabla \rho^{-1}(\vec{\varphi}).$$

Wenn man die Situation nun weiter spezialisiert und einen Bernoullishift mit einem 1-Zylinder $A \in C_1$ als Loch, sowie Dachfunktionen, die auf 1-Zylindern konstant sind (also aus Z_1 stammen), betrachtet, ergibt sich ein Zusammenhang zwischen dem Gradienten an der Stelle $\vec{\mathbb{1}}$ und dem normierten Eigenvektor des Transferoperators \mathcal{L}_{op} zum betragsmäßig größten Eigenwert.

Satz 5.12. *Es bezeichne $(S^{\mathbb{N}}, \theta)$ den Bernoullishift auf dem endlichen Alphabet $S := \{1, 2, \dots, m\}$ mit positiver, stochastischer Übergangsmatrix*

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_m \\ & \vdots & \\ p_1 & \cdots & p_m \end{pmatrix},$$

und es sei $A \in C_1$ ein 1-Zylinder. Ferner sei M_{op} die Matrixdarstellung des Transferoperators $\mathcal{L}_{op}: Z_1 \rightarrow Z_1$ bezüglich der Basistransformation mit Loch $A \in C_1$ wie in [Abschnitt 3.1](#), und es sei \vec{v} der eindeutige nichtnegative Linkseigenvektor mit $|\vec{v}|_1 = 1$ zum Eigenwert $e^{-\rho(\mathbb{1})}$ von M_{op} . Dann gilt

$$\nabla \rho^{-1}(\vec{\mathbb{1}}) = \rho^{-1}(\mathbb{1}) \cdot \vec{v}.$$

²⁴ Um sinnvoll über partielle Ableitungen sprechen zu können, identifiziert man $\varphi \in Z_n$ mit dem Vektor $\vec{\varphi} \in \mathbb{R}_{>0}^{C_n}$ der Funktionswerte von φ auf den n -Zylindern und fasst ρ als Funktion von $\mathbb{R}_{>0}^{C_n}$ nach \mathbb{R} auf.

Diese Situation ist insofern einfach, als dass es leicht möglich ist, den Eigenvektor \vec{v} , die Ausströmrage für $\vec{\varphi} = \vec{\mathbb{1}}$ und das charakteristische Polynom von M_{op} explizit zu bestimmen. Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass $A = [m]$. Gemäß der Ausführungen in [Abschnitt 3.1](#) hat man

$$M_{op} = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_m \\ & \vdots & \\ p_1 & \cdots & p_m \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der Gestalt der Matrix kann man ablesen, dass die Eigenwerte von M_{op} durch den $(m-1)$ -fachen Eigenwert Null²⁵ und den einfachen Eigenwert $1 - p_m = p_1 + p_2 + \cdots + p_{m-1}$ mit dem stochastischen Linkseigenvektor

$$\vec{v} = \left(\frac{p_1}{1 - p_m}, \dots, \frac{p_{m-1}}{1 - p_m}, 0 \right) \quad (21)$$

gegeben sind. Man beachte, dass für die Ausströmrage $\rho(\mathbb{1})$ gilt

$$e^{-\rho(\mathbb{1})} = 1 - p_m.$$

Da alle Eigenwerte von M_{op} und ihre Vielfachheiten bekannt sind, kann man das charakteristische Polynom $f = \det(z \cdot \text{id} - M_{op})$ von M_{op} angeben, ohne die Determinante berechnen zu müssen:

$$f(z) = z^{m-1} \cdot (z - 1 + p_m)$$

Die Zerlegung wie in [Gleichung \(18\)](#) für $\varphi = a_s \cdot \mathbb{1}_{[s]} + \sum_{t \in S \setminus \{s\}} \mathbb{1}_{[t]}$ kann man für $s \neq m$ auf analoge Weise als

$$f_s(z) = z^{a_s} \cdot \underbrace{z^{m-2} \cdot (z - 1 + p_s + p_m)}_{=: g_s(z)} + \underbrace{z^{m-1} \cdot (-p_s)}_{=: h_s(z)}$$

bestimmen, da g_s das charakteristische Polynom derjenigen Untermatrix von M_{op} ist, die sich durch Streichen der s -ten Zeile und Spalte ergibt, und man weiß, dass $f_s = f$ für $a_s = 1$, was die Bestimmung von h_s ermöglicht. Nun kann man [Gleichung \(19\)](#) benutzen, um zuerst $\partial a_s / \partial \rho$ und mittels dessen dann $\partial \rho^{-1} / \partial a_s$ zu bestimmen. Man erhält

$$\frac{\partial a_s}{\partial \rho}(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \cdot \begin{pmatrix} g_s(e^{-\rho}) \\ h_s(e^{-\rho}) \end{pmatrix} \cdot \frac{h'_s(e^{-\rho}) \cdot g_s(e^{-\rho}) - g'_s(e^{-\rho}) \cdot e^{-\rho} \cdot h_s(e^{-\rho})}{g_s^2(e^{-\rho})} \cdot \rho + \log \left(-\frac{h_s(e^{-\rho})}{g_s(e^{-\rho})} \right)$$

²⁵ Man erkennt leicht, dass $(1, -1, 0, \dots, 0), (1, 0, -1, 0, \dots, 0), \dots, (1, 0, \dots, -1, 0)$ sowie $(0, \dots, 0, 1)$ linear unabhängige Linkseigenvektoren zum Eigenwert 0 sind.

und unter Benutzung der Identität

$$e^{-\rho(\mathbb{1})} \cdot g_s \left(e^{-\rho(\mathbb{1})} \right) = -h_s \left(e^{-\rho(\mathbb{1})} \right),$$

dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_s}{\partial \rho} (\rho(\mathbb{1})) &= \frac{1}{\rho(\mathbb{1})^2} \cdot \left(-\frac{h'_s \left(e^{-\rho(\mathbb{1})} \right) + g'_s \left(e^{-\rho(\mathbb{1})} \right) \cdot e^{\rho(\mathbb{1})}}{g_s \left(e^{-\rho(\mathbb{1})} \right)} \cdot \rho(\mathbb{1}) - \rho(\mathbb{1}) \right) \\ &= -\frac{f' \left(e^{-\rho(\mathbb{1})} \right) - g_s \left(e^{-\rho(\mathbb{1})} \right)}{g_s \left(e^{-\rho(\mathbb{1})} \right) \cdot \rho(\mathbb{1})} - \frac{1}{\rho(\mathbb{1})} \\ &= -\frac{f' \left(e^{-\rho(\mathbb{1})} \right)}{g_s \left(e^{-\rho(\mathbb{1})} \right) \cdot \rho(\mathbb{1})} \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial a_s} (1) &= -\frac{\frac{1}{\frac{\partial a_s}{\partial \rho} (\rho(\mathbb{1}))}}{\rho(\mathbb{1})^2} \\ &= \frac{1}{\rho(\mathbb{1})} \cdot \frac{g_s \left(e^{-\rho(\mathbb{1})} \right)}{f' \left(e^{-\rho(\mathbb{1})} \right)} \\ &= \frac{1}{\rho(\mathbb{1})} \cdot \frac{(1-p_m)^{m-2} \cdot p_s}{0 + (1-p_m)^{m-1}} \\ &= \frac{1}{\rho(\mathbb{1})} \cdot \frac{p_s}{1-p_m}. \end{aligned}$$

Somit hat man für $s \neq m$ die partiellen Ableitungen von ρ^{-1} nach den a_s in $\bar{\mathbb{1}}$ ermittelt. Für den Funktionswert a_m über dem Loch gilt, wie eingangs bereits erwähnt, $\partial_{a_m} \rho^{-1} \equiv 0$, da die Funktionswerte über dem Loch bei beschränkten Funktionen keinen Einfluss auf die Ausströmrate haben. Insgesamt erhält man also

$$\partial_s \rho^{-1} (\bar{\mathbb{1}}) = \begin{cases} \frac{1}{\rho(\mathbb{1})} \cdot \frac{p_s}{1-p_m} & , s \in \{1, \dots, m-1\} \\ 0 & , s = m \end{cases},$$

oder als Gradient geschrieben

$$\nabla \rho^{-1} (\bar{\mathbb{1}}) = \frac{1}{\rho(\mathbb{1})} \cdot \left(\frac{p_1}{1-p_m}, \dots, \frac{p_{m-1}}{1-p_m}, 0 \right).$$

Ein Vergleich mit dem Eigenvektor \vec{v} aus Gleichung (21) ergibt, dass

$$\nabla \rho^{-1}(\vec{\mathbb{1}}) = \rho^{-1}(\mathbb{1}) \cdot \vec{v},$$

womit Satz 5.12 bewiesen ist.

Man kann dieses Ergebnis auch als Aussage über eine Approximation der reziproken Ausströmrates mittels eines Integrals interpretieren. Mit M_{op} als Übergangsmatrix erhält man einen Shift $\theta_{op} : S^{\mathbb{N}} \rightarrow S^{\mathbb{N}}$, der kein invariantes Maß, sondern ein sich aus dem Vektor \vec{v} ergebendes bedingt invariantes Maß ν besitzt. Es ist

$$\nu([a_1, \dots, a_n]) := v_{a_1} \cdot p_{a_1, a_2} \cdot p_{a_2, a_3} \cdots p_{a_{n-1}, a_n}$$

für Zylindermengen $[a_1, \dots, a_n]$, und es gilt

$$\nu(\theta_{op}^{-1}([a_1, \dots, a_n])) = (1 - p_m) \cdot \nu([a_1, \dots, a_n]).$$

Für Funktionen $\varphi : S^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$, die konstant auf 1-Zylindern sind, ist das Integral bezüglich ν durch das Skalarprodukt von $\vec{\varphi}$ mit \vec{v} gegeben:

$$\int \varphi \, d\nu = \langle \vec{v}, \vec{\varphi} \rangle$$

Wenn man nun $\varphi = k \cdot \mathbb{1} + \delta\varphi$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{R}$ ungleich Null schreibt, erhält man aufgrund der eingangs erwähnten Eigenschaften von $\nabla \rho^{-1}$, dass

$$\begin{aligned} \frac{\int \varphi \, d\nu}{\rho(\mathbb{1})} &= \frac{\langle \vec{v}, \vec{\varphi} \rangle}{\rho(\mathbb{1})} = \langle \nabla \rho^{-1}(\vec{\mathbb{1}}), \vec{\varphi} \rangle \\ &= \langle \nabla \rho^{-1}(k \cdot \vec{\mathbb{1}}), k \cdot \vec{\mathbb{1}} + \vec{\delta\varphi} \rangle \\ &= \rho^{-1}(k \cdot \mathbb{1}) + \langle \nabla \rho^{-1}(k \cdot \vec{\mathbb{1}}), \vec{\delta\varphi} \rangle \\ &\approx \rho^{-1}(k \cdot \mathbb{1} + \delta\varphi) = \rho^{-1}(\varphi). \end{aligned}$$

Man kann also das Verhältnis $\rho(\mathbb{1}) / \rho(\varphi)$ für nah bei einer Konstanten k liegende Funktionen φ durch das Integral $\int \varphi \, d\nu$ annähern.

DIE LOKALE AUSSTRÖMRATE

Das vorhergehende Kapitel war unter anderem der Frage gewidmet, in welchem Maße die Ausströmrage abnimmt, wenn die Dachfunktion über einem Zylinder anwächst. Doch nicht nur bei wachsender Dachfunktion, sondern auch bei schrumpfendem Loch nimmt die Ausströmrage ab und man kann nach dem Verhalten fragen.

In diesem Kapitel wird nicht vorausgesetzt, dass die Basistransformation ein Markovshift ist. Stattdessen wird die folgende Annahme gemacht.

Annahme 6.1. Es sei ein metrischer Raum (X, d) mit einem endlichen Borelmaß μ gegeben. Es sei $\theta : (X, \mu) \rightarrow (X, \mu)$ ein Endomorphismus. Es werde die Halbströmung Φ über der Basistransformation θ unter einer messbaren, beschränkten und von Null weg beschränkten Dachfunktion $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ betrachtet. Die Bezeichnungen $\bar{X}, \bar{\mu}, \pi_1, \dots$ werden wie in [Kapitel 2](#) verwendet.

Definition 6.2. Es sei ein Punkt $x \in X$ gegeben, für den jede Umgebung $B_r(x) \subset X$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ein Loch definiert. Sofern der Grenzwert

$$\rho(x, \varphi) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho(B_r(x), \varphi)}{\mu(B_r(x))}$$

existiert, wird er **LOKALE AUSSTRÖMRATE** im Punkt x bezüglich der Dachfunktion φ genannt. Ist $\varphi = \mathbb{1}$, so spricht man auch von der lokalen Ausströmrage in x bezüglich der Basis.²⁶

lokale
Ausströmrage

Bemerkung 6.3. Es mag zuerst verwundern, dass zwar die Ausströmrage $\rho(B_r(x), \varphi)$ bezüglich der Strömung verwendet, aber nicht durch $\bar{\mu}(\pi_1^{-1}(B_r(x)))$ oder das Maß einer Kugel um $(x, 0) \in \bar{X}$ geteilt wird, sondern durch das Maß $\mu(B_r(x))$ des Lochs in der Basis. Dies ist jedoch eine sinnvolle Wahl, da aus [Satz 2.6](#) bekannt ist, dass die Ausströmrage nur von der Projektion des Lochs auf die Basis abhängt.

Bemerkung 6.4. Wenn man einen einseitigen Shift betrachtet, so entsprechen in der Standardmetrik²⁷ um einen Punkt $x \in X$ zentrierte Kugeln von abnehmendem Radius Zylindern von wachsender Länge. Für

²⁶ Siehe auch [Bemerkung 2.11](#).

²⁷ Siehe [Definition 1.6](#).

$x = (x_1, x_2, \dots)$ bedeutet dies, dass man die lokale Ausströmrage als

$$\rho(x, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho([x_1, \dots, x_k], \varphi)}{\mu([x_1, \dots, x_k])}$$

schreiben kann.

Für diskrete Systeme wird die lokale Ausströmrage unter anderem in [KL2009, BY2011, FP2012, CKDE2013] untersucht. Das Ergebnis aus [CKDE2013] für Markovshifts wird in [Abschnitt 7.1](#) in einer angepassten Variante als Werkzeug zur Untersuchung von Halbströmungen herangezogen werden.

In diesem Kapitel soll vorausgesetzt werden, dass die lokale Ausströmrage im zu untersuchenden Punkt bezüglich der Basis existiert, um darauf aufbauend ein Ergebnis für die lokale Ausströmrage der Halbströmung herzuleiten. Zuerst wird das Ergebnis heuristisch motiviert.

Unter Verwendung der Schreibweise aus [Lemma 2.12](#) hat man für ein Loch $A \subset X$

$$\rho(A, \varphi) = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log(\mu(\{x \in X \mid N_A(x) \geq N_t(x)\})).$$

Wenn man annimmt, dass, wie es beispielsweise bei ergodischen Transformationen der Fall ist, $S_n \varphi / n \rightarrow \mu(\varphi)$ gilt und diese Konvergenz hinreichend schnell ist, so kann man die Größe N_t durch $S_{N_t} \varphi / \mu(\varphi)$ annähern. Wenn nun $S_{N_t} \varphi$ hinreichend gut durch t approximiert wird, beispielsweise wenn φ beschränkt ist, ergibt sich als naive Näherung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \bar{\mu} \left(\left\{ x \in X \mid N_A(x) \geq \frac{t}{\mu(\varphi)} \right\} \right) = \frac{1}{\mu(\varphi)} \rho(A, \mathbb{1})$$

und somit die Vermutung, dass $\rho(A, \varphi)$ in günstigen Fällen durch die Ausströmrage von A bezüglich der Basis und das Integral von φ bestimmt wird. Da ein System mit Loch die Höhe der Dachfunktion über dem Loch nicht erkennen kann, dieser Wert aber für das Integral $\mu(\varphi)$ relevant ist, kann eine derartige Approximation nur im Grenzwert für kleine Löcher gültig sein – dies ist gerade die für die lokale Ausströmrage zu betrachtende Situation.

Um die Bedingung einer hinreichend schnellen Konvergenz von $S_k \varphi / k$ gegen $\mu(\varphi)$ zu formalisieren, bedenke man, dass sich die fast sichere, punktweise Konvergenz, wie man sie im Fall einer ergodischen Transformation aus dem Birkhoffschen Ergodensatz ([Satz 1.20](#)) erhält, mittels der Menge

$$P_k^\varepsilon := \mu \left(\left\{ x \in X \mid \sup_{l \geq k} \left| \frac{S_l \varphi(x)}{l} - \mu(\varphi) \right| \geq \varepsilon \right\} \right) \quad (22)$$

auch als $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k^\varepsilon = 0$ für alle $\varepsilon > 0$ formulieren lässt. Hierfür kann man nun ein exponentielles Abklingen fordern, das heißt es soll für jedes $\varepsilon > 0$ Konstanten $C > 0$ und $\zeta < 1$ geben, sodass $P_k^\varepsilon \leq C\zeta^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Theorem 6.5. *Es sei Annahme 6.1 erfüllt. Es sei $x_0 \in X$ ein Punkt, für den die lokale Ausströmrates bezüglich der Basis existiert und in dem das Maß μ kein Atom hat. P_k^ε sei wie in Gleichung (22) definiert, und es gelte*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists C > 0, \zeta_1 < 1 : \forall k \in \mathbb{N} : P_k^\varepsilon \leq C\zeta_1^k.$$

Dann gilt

$$\rho(x_0, \varphi) = \frac{\rho(x_0, \mathbb{1})}{\mu(\varphi)}.$$

Beweis. Wenn $\rho(x_0, \mathbb{1}) = 0$, dann gilt wegen

$$\begin{aligned} \rho(x_0, \mathbb{1}) \cdot \frac{1}{\sup \varphi} &= \rho(x_0, \sup \varphi) \\ &\leq \rho(x_0, \varphi) \\ &\leq \rho(x_0, \inf \varphi) = \rho(x_0, \mathbb{1}) \cdot \frac{1}{\inf \varphi}, \end{aligned}$$

dass auch $\rho(x_0, \varphi) = 0$. Im Folgenden kann also ohne Einschränkung angenommen werden, dass $\rho(x_0, \mathbb{1}) > 0$.

Die Strategie dieses Beweises ist es, über eine obere und untere Abschätzung für die Größe

$$\mu(\{x \in X | N_{B_r} \geq N_t\})$$

zu einer unteren und oberen Abschätzung der lokalen Ausströmrates zu gelangen, aus denen sich dann das Resultat folgern lässt.²⁸ Wie in der heuristischen Herleitung wird zu diesem Zweck zuerst die Größe N_t umformuliert. Es ist

$$N_t = \frac{S_{N_t} \varphi}{\mu(\varphi) + R_{N_t}},$$

wobei

$$R_{N_t} := \frac{S_{N_t} \varphi}{N_t} - \mu(\varphi).$$

Man beachte, dass aus $\sup \varphi < \infty$ folgt, dass $N_t(x)$ für $t \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen ∞ strebt.²⁹ Nun fixiere man ein beliebiges $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \mu(\varphi)$.

²⁸ Um die Notation möglichst kompakt zu halten, wird die Menge $B_r(x_0)$ im weiteren Verlauf verkürzt als B_r bezeichnet.

²⁹ Dies bedeutet, dass es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $t_0 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $N_t(x) \geq K$ für alle $t \geq t_0$ und alle $x \in X$.

Teil 1: Abschätzung der lokalen Ausströmrates nach oben

$$\begin{aligned}
& \mu(\{x \in X \mid N_{B_r} \geq N_t\}) \\
&= \mu\left(\left\{x \in X \mid N_{B_r} \geq \frac{S_{N_t} \varphi}{\mu(\varphi) + R_{N_t}}\right\}\right) \\
&\geq \mu\left(\left\{x \in X \mid N_{B_r} \geq \frac{S_{N_t} \varphi}{\mu(\varphi) - \varepsilon}\right\} \setminus \{x \in X \mid R_{N_t} < -\varepsilon\}\right) \\
&\geq \mu\left(\left\{x \in X \mid N_{B_r} \geq \frac{S_{N_t}}{\mu(\varphi) - \varepsilon}\right\}\right) - \underbrace{\mu(\{x \in X \mid R_{N_t} < -\varepsilon\})}_{P_{N_t}^\varepsilon} \\
&\geq \underbrace{\mu\left(\left\{x \in X \mid N_{B_r} \geq \frac{t + \sup \varphi}{\mu(\varphi) - \varepsilon}\right\}\right)}_{=:(*)} - P_{N_t}^\varepsilon
\end{aligned} \tag{23}$$

$P_{N_t}^\varepsilon$ kann durch

$$P_{N_t}^\varepsilon \leq C \zeta_1^{\left(\frac{t}{\sup \varphi}\right)} = C \zeta_1^t \tag{24}$$

mit $\zeta_1 := \zeta_1^{1/\sup \varphi} < 1$ weiter abgeschätzt werden, da $N_t(x) \geq t/\sup \varphi$. Da die lokale Ausströmrates bezüglich der Basis existiert und größer als Null ist, gilt

$$\forall \varepsilon' > 0 \exists r_0(\varepsilon') : \forall r \in (0, r_0) : \frac{\rho(B_r, \mathbb{1})}{\mu(B_r)} \leq (1 + \varepsilon') \rho(x_0, \mathbb{1}),$$

sodass die Abschätzung

$$\rho(B_r, \mathbb{1}) \leq (1 + \varepsilon') \rho(x_0, \mathbb{1}) \mu(B_r) \tag{25}$$

für hinreichend kleine r gilt. Da die Ausströmrates bezüglich der Dachfunktion $\mathbb{1}$ und die Ausströmrates bezüglich der Basis übereinstimmen, ergibt sich aus der Definition der Ausströmrates für diskrete Systeme und unter Berücksichtigung von [Bemerkung 2.2](#), dass

$$\begin{aligned}
& \forall \varepsilon'' > 0 \exists t_0(\varepsilon'', r) : \forall t \geq t_0 : \\
& \quad -\frac{1}{t} \log \mu(\{x \in X \mid N_{B_r} \geq t\}) \leq (1 + \varepsilon'') \rho(B_r, \mathbb{1}),
\end{aligned}$$

was impliziert, dass die Abschätzung

$$\mu(\{x \in X \mid N_{B_r} \geq t\}) \geq \left(e^{-(1+\varepsilon'')\rho(B_r, \mathbb{1})}\right)^t \tag{26}$$

für hinreichend große t gilt. Ungleichungen (25) und (26) ergeben zusammen, dass

$$\mu(\{x \in X | N_{B_r} \geq t\}) \geq \left(e^{-(1+\varepsilon'')(1+\varepsilon')\rho(x_0, \mathbb{1})\mu(B_r)} \right)^t =: \zeta_2^t$$

mit $\zeta_2(r, \varepsilon', \varepsilon'') < 1$ für hinreichend kleine r und hinreichend große $t(r)$ gilt. Man beachte, dass ζ_2 für $r \rightarrow 0$ wegen $\lim_{r \rightarrow 0} \mu(B_r(x_0)) = 0$ gegen 1 strebt, da μ endlich und in x_0 ohne Atom ist. Diese Ungleichung kann in Kombination mit (24) verwendet werden, um die Ungleichungskette (23) fortzusetzen:

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in X | N_{B_r} \geq N_t\}) &\geq (\star) - P_{N_t}^\varepsilon \\ &\geq \zeta_2^{\frac{t+\sup \varphi}{\mu(\varphi)-\varepsilon}} - C\zeta_1^t \\ &\geq \zeta_2^{\frac{t+\sup \varphi}{\mu(\varphi)-\varepsilon}} \cdot \left(1 - C\zeta_2^{-\left(\frac{1+\sup \varphi \cdot t^{-1}}{\mu(\varphi)-\varepsilon}\right) \cdot t} \zeta_1^t \right) \\ &= \zeta_2^{\frac{t+\sup \varphi}{\mu(\varphi)-\varepsilon}} \cdot (1 - C\zeta_3^t) \end{aligned}$$

mit

$$\zeta_3 := \zeta_2^{-\frac{1+\sup \varphi \cdot t^{-1}}{\mu(\varphi)-\varepsilon}} \zeta_1.$$

Dies ist die nötige untere Abschätzung für $\mu(\{x \in X | N_{B_r} \geq N_t\})$.

Zur für die Ermittlung der für die Ausströmrage relevanten Größe gelangt man nun mittels

$$\begin{aligned} -\frac{1}{t} \log \mu(\{x \in X | N_{B_r} \geq N_t\}) \\ \leq -\frac{1}{t} \cdot \frac{t+\sup \varphi}{\mu(\varphi)-\varepsilon} \log \zeta_2 - \frac{1}{t} \log(1 - C\zeta_3^t). \end{aligned}$$

Man beachte, dass aus der zuvor bemerkten Eigenschaft, dass $\zeta_2 \rightarrow 1$ für $r \rightarrow 0$, und der Tatsache, dass $\zeta_1 < 1$ ist, folgt, dass $\zeta_3 < 1$ für hinreichend kleines r und hinreichend großes $t(r)$. Für $t \rightarrow \infty$ ergibt sich also, dass $1 - C\zeta_3^t$ für hinreichend kleines r positiv, beschränkt und von Null weg beschränkt ist, und folglich gilt in dieser Situation

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(1 - C\zeta_3^t) = 0.$$

Unter Benutzung dieser Tatsache und durch Einsetzen der Definition von ζ_2 erhält man

$$\begin{aligned}\rho(B_r, \varphi) &= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \mu(\{x \in X | N_{B_r} \geq N_t\}) \\ &\leq \frac{1}{\mu(\varphi) - \varepsilon} \cdot (1 + \varepsilon'') (1 + \varepsilon') \rho(x_0, \mathbb{1}) \mu(B_r) + 0\end{aligned}$$

für hinreichend kleine r . Diese Ungleichung gilt für alle $\varepsilon'' > 0$, sodass sich

$$\frac{\rho(B_r, \varphi)}{\mu(B_r)} \leq \frac{1}{\mu(\varphi) - \varepsilon} \cdot (1 + \varepsilon') \rho(x_0, \mathbb{1})$$

ergibt. Wenn man nun r gegen 0 gehen lässt, kann auch ε' beliebig klein werden, sodass man

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\rho(B_r, \varphi)}{\mu(B_r)} \leq \frac{1}{\mu(\varphi) - \varepsilon} \cdot \rho(x_0, \mathbb{1})$$

erhält. Da schließlich $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden konnte, ergibt sich als obere Abschätzung der lokalen Ausströmrates

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\rho(B_r, \varphi)}{\mu(B_r)} \leq \frac{\rho(x_0, \mathbb{1})}{\mu(\varphi)}.$$

Teil 2: Abschätzung der lokalen Ausströmrates nach unten

Die zweite Abschätzung wird auf ähnliche Weise wie die erste gewonnen. Zuerst wird wieder das Maß von $\{x \in X | N_{B_r} \geq N_t\}$ abgeschätzt, jedoch diesmal nach oben.

$$\begin{aligned}&\mu(\{x \in X | N_{B_r} \geq N_t\}) \\ &\leq \mu\left(\left\{x \in X \mid N_{B_r} \geq \frac{S_{N_t} \varphi}{\mu(\varphi) + \varepsilon}\right\} \cup \{x \in X | R_{N_t} > \varepsilon\}\right) \\ &\leq \mu\left(\left\{x \in X \mid N_{B_r} \geq \frac{S_{N_t} \varphi}{\mu(\varphi) + \varepsilon}\right\}\right) + \mu(\{x \in X | R_{N_t} > \varepsilon\}) \\ &\leq \underbrace{\mu\left(\left\{x \in X \mid N_{B_r} \geq \frac{t}{\mu(\varphi) + \varepsilon}\right\}\right)}_{=:(**)} + P_{N_t}^\varepsilon\end{aligned}$$

Die Abschätzung (24) für $P_{N_t}^\varepsilon$ kann ohne Veränderung verwendet werden. Man erhält

$$\rho(B_r, \mathbb{1}) \geq (1 - \varepsilon') \rho(x_0, \mathbb{1}) \mu(B_r)$$

für hinreichend kleine r als Analogon zu (25). Als Entsprechung von (26) ergibt sich

$$\mu(\{x \in X | N_{B_r} \geq t\}) \leq \left(e^{-(1-\varepsilon'')\rho(B_r, \mathbb{1})} \right)^t$$

für hinreichend große t . Zusammengekommen gilt

$$\mu(\{x \in X | N_{B_r} \geq t\}) \leq \left(e^{-(1-\varepsilon'')(1-\varepsilon')\rho(x_0, \mathbb{1})\mu(B_r)} \right)^t =: \zeta_4^t$$

mit $\zeta_4(r, \varepsilon', \varepsilon'') < 1$ für hinreichend kleine r und hinreichend große $t(r)$, wobei ζ_4 für $r \rightarrow 0$ gegen 1 strebt. Dies lässt sich nun zu

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in X | N_{B_r} \geq N_t\}) &\leq (\star\star) + P_{N_t}^\varepsilon \\ &\leq \zeta_4^{\frac{t}{\mu(\varphi)+\varepsilon}} + C\zeta_1^t \\ &= \zeta_4^{\frac{t}{\mu(\varphi)+\varepsilon}} \cdot \left(1 + C\zeta_4^{-\left(\frac{1}{\mu(\varphi)+\varepsilon}\right)t} \zeta_1^t \right) \\ &= \zeta_4^{\frac{t}{\mu(\varphi)+\varepsilon}} \cdot (1 + C\zeta_5^t) \end{aligned}$$

mit

$$\zeta_5 := \zeta_4^{-\frac{1}{\mu(\varphi)+\varepsilon}} \zeta_1$$

zusammenführen, wobei $\zeta_5 < 1$ für hinreichend kleine r gilt. Als Schritt in Richtung der Ausströmrate erhält man

$$-\frac{1}{t} \log \mu(\{x \in X | N_{B_r} \geq N_t\}) \geq -\frac{1}{\mu(\varphi)+\varepsilon} \log \zeta_4 - \frac{1}{t} \log(1 + C\zeta_5^t)$$

und stellt fest, dass $1 + C\zeta_5^t$ für $t \rightarrow \infty$ bei hinreichend kleinem r positiv, beschränkt und von Null weg beschränkt ist, also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(1 + C\zeta_5^t) = 0$$

gilt. Dies bedeutet, dass

$$\begin{aligned} \rho(B_r, \varphi) &= \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \log \mu(\{x \in X | N_{B_r} \geq N_t\}) \\ &\geq \frac{1}{\mu(\varphi)+\varepsilon} \cdot (1-\varepsilon'')(1-\varepsilon')\rho(x_0, \mathbb{1})\mu(B_r) + 0 \end{aligned}$$

für hinreichend kleines r . Wie bereits bei der umgekehrten Abschätzung kann ε'' beliebig klein gewählt werden, und wenn r gegen 0 strebt, dürfen auch ε und ε' letztlich beliebig klein werden. Man erhält folglich

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\rho(B_r, \varphi)}{\mu(B_r)} \geq \frac{\rho(x_0, \mathbb{1})}{\mu(\varphi)}.$$

Zusammen mit der zuvor bewiesenen Abschätzung für den Limes superior ergibt sich die Aussage des Theorems. \square

Einen allgemeinen Blick auf Ergebnisse zum Verhalten von P_k^ε gibt der Übersichtsartikel [Kac1996] und relevante Ergebnisse zu einem exponentiellen Abklingen bei Markovshifts finden sich in [KT1961, BKR1962]. Das entscheidende Resultat wird nachfolgend mit angepasster Notation wiedergegeben.

Satz 6.6 (Katz und Thomasian [KT1961]). *Es sei Annahme 1.14 erfüllt,³⁰ und es sei $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte, messbare Funktion, die konstant auf 1-Zylindern ist. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Konstanten $C, \zeta \in \mathbb{R}$, $\zeta < 1$ mit der Eigenschaft*

$$\forall k \in \mathbb{N} : P_k^\varepsilon = \mu \left(\left\{ x \in X \mid \sup_{l \geq k} \left| \frac{S_l(x)}{l} - \mu(\varphi) \right| \geq \varepsilon \right\} \right) \leq C \zeta^k.$$

Bemerkung 6.7. Da für Theorem 6.5 vorausgesetzt wird, dass die Dachfunktion φ beschränkt ist, ist es nicht nötig, das weitergehende Resultat [BKR1962, Theorem 4] heranzuziehen, welches auch gewisse unbeschränkte Funktionen φ erlaubt. Die durch Annahme 1.14 eingebrachte Beschränkung auf Markovshifts mit endlichem Alphabet ist für die Resultate in [KT1961, BKR1962] nicht notwendig und kann durch eine Bedingung von Doeblin³¹ ersetzt werden, die im Falle eines endlichen Alphabets immer erfüllt ist.³²

Dieser Satz ist unmittelbar nur auf Funktionen φ anzuwenden, die konstant auf den 1-Zylindern des Markovshifts sind. Da der Markovshift jedoch auch auf einem verfeinerten Alphabet aus Wörtern der Länge n betrachtet werden kann, wie es bereits zur Untersuchung von n -Zylindern als Löcher getan wurde, sind auch Funktionen zulässig, die auf n -Zylindern konstant sind. Somit kann das Resultat verwendet werden, um eine spezielle Version von Theorem 6.5 zu formulieren, in der das exponentielle Abklingen von P_k^ε nicht explizit vorausgesetzt werden muss.

Korollar 6.8. *Es sei Annahme 1.15 erfüllt, die Dachfunktion φ sei positiv und stetig, und es sei $x_0 \in X$ ein Punkt, für den die lokale Ausströmrate bezüglich der Basis existiert und den Wert $\rho(x_0, \mathbb{1})$ hat. Dann gilt*

$$\rho(x_0, \varphi) = \frac{\rho(x_0, \mathbb{1})}{\mu(\varphi)}.$$

³⁰ Man beachte, dass dies impliziert, dass der Markovshift θ ergodisch ist. (Fakt 1.19)

³¹ Siehe [Doo1953, S. 192].

³² [Doo1953, Beispiel 1 auf S. 192]

Beweis. Mittels [Satz 6.6](#) kann auf die Gültigkeit von [Theorem 6.5](#) für $\varphi \in Z_n$ geschlossen werden. Da diese Funktionen die stetigen Funktionen gleichmäßig approximieren ([Satz 3.1](#)), ergibt sich aus der Monotonieeigenschaft der Ausströmrates, die sich auf die lokale Ausströmrates überträgt, dass [Theorem 6.5](#) auch für stetiges $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ gilt. \square

Diese Aussage über die lokale Ausströmrates lässt sich – zumindest für λ -arithmetische Dachfunktionen über Markovshifts – auch aus den Ergebnissen in [[FP2012](#)] oder [[CKDE2013](#)] ableiten. Dazu betrachtet man das System bezüglich der Transformation Φ_λ mit Löchern $B_r \times [0, \lambda)$ als neuen Markovshift, dessen invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß durch $\bar{\mu}/\mu(\varphi)$ beschrieben wird. Beide Artikel enthalten explizite Formeln für die lokale Ausströmrates, von denen ersichtlich ist, dass sie nicht durch die Wahl einer Dachfunktion ungleich $\mathbb{1}$ verändert werden.³³ Der Faktor $1/\mu(\varphi)$ für die lokale Ausströmrates bezüglich der Strömung ergibt sich dann daraus, dass in jener Formulierung zur Ermittlung der lokalen Ausströmrates jeweils durch $\bar{\mu}(B_r \times [0, \lambda)) / \mu(\varphi) = \lambda/\mu(\varphi) \cdot \mu(B_r)$ geteilt wird, während für die lokale Ausströmrates bezüglich der Basis transformation nur durch $\mu(B_r)$ zu teilen ist. Der ebenfalls erscheinende Faktor λ verschwindet, wenn man berücksichtigt, dass man an der Ausströmrates bezüglich Φ (beziehungsweise äquivalent Φ_1) interessiert ist und nicht an jener von Φ_λ . Übrig bleibt der Faktor $1/\mu(\varphi)$, der die lokalen Ausströmrates bezüglich der Basis und der Strömung unterscheidet.

³³ Für periodische Punkte wird in [Satz 7.18](#), basierend auf dem Ansatz von Cristadoro, Knight und Degli Esposti [[CKDE2013](#)], eine explizite Formel für die lokale Ausströmrates angegeben werden.

Die Ergebnisse aus [Kapitel 6](#) zeigen, dass Kenntnis der Dachfunktion und der Ausströmraten in der Basis ausreicht, um in gutartigen Situationen die lokale Ausströmrates bezüglich der Strömung angeben zu können. Sie zeigen jedoch auch, dass die lokale Ausströmrates kein tauglicher Begriff ist, um aus ihr Rückschlüsse auf die Gestalt der Dachfunktion zu ziehen, da die Dachfunktion nur mit ihrem Integral in die lokale Ausströmrates eingeht, nicht jedoch mit einem dem speziellen Punkt zugeordneten Wert. Diese Schwierigkeit ließe sich zwar beseitigen, wenn man bei der Definition der lokalen Ausströmrates für Halbströmungen anstelle der Normierung durch das Maß des Lochs $B_r \subset X$ das Maß von $\pi_1^{-1}(B_r) \subset \bar{X}$ verwendete, sodass man im Fall einer stetigen Dachfunktion $\rho(x, \mathbb{1}) / (\varphi(x) \cdot \mu(\varphi))$ als lokale Ausströmrates im Punkt $x \in X$ bezüglich der Dachfunktion φ erwarten würde.³⁴ Die Information $\varphi(x)$ käme dann jedoch allein aus dem Verhalten von $\bar{\mu}(\pi_1^{-1}(B_r))$ und hätte keine direkte Beziehung zur Ausströmrates.

Problem 7.1 (Umkehrproblem). Lässt sich bei vollständiger Kenntnis der Eigenschaften der Basis³⁵ die Dachfunktion aus den Ausströmrates bezüglich der Strömung rekonstruieren?

Eine vollständige Rückgewinnung der Dachfunktion aus den Ausströmrates kann nicht gelingen, da nach [Satz 2.13](#) (c) mittels der Ausströmrates nicht zwischen Dachfunktionen unterschieden werden kann, deren Differenz ein Korand, also von der Gestalt $\chi \circ \theta - \chi$, ist. Das nachfolgende Beispiel legt jedoch nahe, dass es möglich ist, die bei Abänderung einer Funktion um einen Korand unverändert bleibenden Orbitlängen periodischer Punkte aus den Ausströmrates zu rekonstruieren.

Beispiel 7.2. Es werde das [Beispiel 1.17](#) aufgegriffen. Ferner bezeichne $x = (1010\dots) \in X$ denjenigen periodischen Punkt, der durch Wiederholung des Worts $w = (10)$ entsteht, und es seien $A_\nu := [x_1, \dots, x_{2\nu}]$ für $\nu \in \mathbb{N}$ die schrumpfenden Umgebungen von x . In [Abbildung 10](#) wird die Konvergenz von $\rho(A_\nu, \mathbb{1}) / \mu(A_\nu)$ gegen $\rho(x, \mathbb{1})$ illustriert.

³⁴ Siehe auch [Bemerkung 6.3](#).

³⁵ Damit ist gemeint, dass die Maße und Ausströmrates aller Mengen in der Basis bekannt sind.

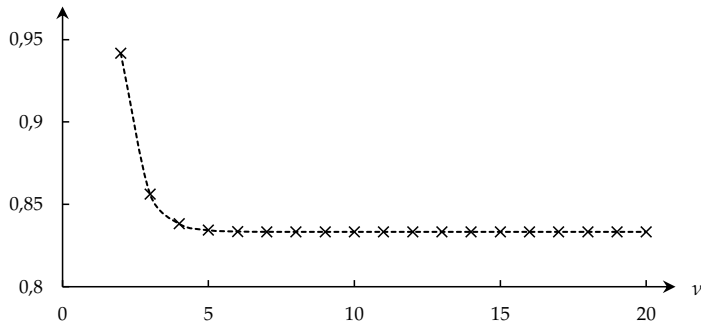
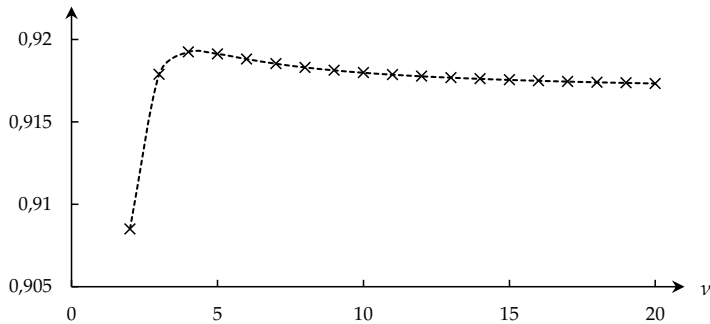
Abbildung 10: Verhalten von Gleichung (27) aus Beispiel 7.2 für $\varphi = \mathbb{1}$ 

Abbildung 11: Verhalten von Gleichung (28) aus Beispiel 7.2

Da auch

$$\frac{\rho\left(A_\nu, \frac{\varphi}{\mu(\varphi)}\right)}{\mu(A_\nu)} \quad (27)$$

gegen $\rho(x, \mathbb{1})$ konvergiert, ist es angebracht, die jeweiligen Abweichungen vom Grenzwert zu vergleichen, also

$$\frac{\frac{\rho\left(A_\nu, \frac{\varphi}{\mu(\varphi)}\right)}{\mu(A_\nu)} - \rho\left(x, \frac{\varphi}{\mu(\varphi)}\right)}{\frac{\rho(A_\nu, \mathbb{1})}{\mu(A_\nu)} - \rho(x, \mathbb{1})} \quad (28)$$

anzuschauen. Dies wird in [Abbildung 11](#) dargestellt. Der Wert stabilisiert sich hierbei gegen $0,91\bar{6}$ und dies ist gerade

$$\frac{\frac{1}{\mu(\varphi)} \cdot \left(\frac{4}{8} + \frac{1}{8}\right)}{2} = \frac{S_2\left(\frac{\varphi}{\mu(\varphi)}\right)(x)}{S_2(\mathbb{1})(x)}.$$

In [Abschnitt 7.1](#) wird ein von [Cristadoro, Knight und Degli Esposti](#) beschriebenes alternatives Verfahren zur Berechnung der Ausströmrate bei Markovshifts für die Halbströmungssituation adaptiert. Dieses Verfahren erlaubt es, die Konvergenz gegen die lokale Ausströmrate näher zu untersuchen. In [Abschnitt 7.2](#) werden diese Ergebnisse genutzt, um den Grenzwert von Folgen der in [Gleichung \(28\)](#) beschriebenen Gestalt zu bestimmen und eine Lösung des Umkehrproblems anzugeben.

7.1 EINE ALTERNATIVE BESCHREIBUNG VON $\bar{\mathcal{L}}_{op}$

Zur Berechnung expliziter Werte von Ausdrücken wie in [Gleichung \(27\)](#) ist es nötig, die Ausströmrates auch für sehr lange Zylinder als Loch berechnen zu können. Das naive Verfahren zur Berechnung der Ausströmrates bei zylinderartigen Löchern, wie es in [Abschnitt 3.2](#) dargestellt wurde, basiert darauf, eine Matrix anzugeben, die den Transferoperator $\bar{\mathcal{L}}$ darstellt und dann jene Zeilen Null zu setzen, die zu A gehören, um eine Darstellung von $\bar{\mathcal{L}}_{op}$ zu erhalten. Dies führt jedoch zu einer Situation, in der die Größe der Matrix exponentiell mit der Länge des Lochs wächst, was die explizite Eigenwertberechnung erschwert. [Cristadoro, Knight und Degli Esposti](#) modifizieren diesen naiven Ansatz:

„While escape processes are usually interpreted in the literal sense that points are removed from the system, we consider the following equivalent approach: a point that hits the hole does not leave the system, but rather it is coupled to a new point with negative mass.“ [\[CKDE2013\]](#)

Durch diese Modifikation und die geschickte Wahl einer Basis ergibt sich eine Matrixdarstellung von $\bar{\mathcal{L}}_{op}$, die neben dem numerischen Vorteil eines nur noch linearen Anwachsens der Matrixgröße in Abhängigkeit von der Länge des Lochs³⁶ auch die Möglichkeit eröffnet, exakte Aussagen über das Verhalten der Ausströmrates bei schrumpfendem Loch zu machen. In [Abschnitt 7.1.1](#) wird die Herleitung dieser alternativen Darstellung von $\bar{\mathcal{L}}_{op}$ nachvollzogen und gegenüber [\[CKDE2013\]](#) erweitert, um die spezielle Struktur von Halbströmungen unter einer (arithmetischen) Dachfunktion über einem Markovshift als Basis abzubilden. In [Abschnitt 7.1.2](#) wird gezeigt, wie sich diese Darstellung von $\bar{\mathcal{L}}_{op}$ nutzen lässt, um das Verhalten der Ausströmrates zu beschreiben, wenn das Loch auf einen periodischen Punkt zuschrumpft. In [\[CKDE2013\]](#) werden derartige Betrachtungen nur für einige Spezialfälle ausformuliert, wobei die Argumentation teilweise nicht rigoros, sondern eher heuristisch ist.

³⁶ Da für allgemeine stetige Dachfunktionen eine immer besser werdende Approximation durch Zylinderfunktionen nötig ist, die ihrerseits ein Anwachsen der Basis erforderlich macht, überträgt sich dieser Vorteil jedoch nicht in vollem Umfang auf die Berechnung von Ausströmrates bei Halbströmungen unter einer Funktion.

7.1.1 Das Verfahren von Cristadoro, Knight und Degli Esposti

In diesem Abschnitt wird davon ausgegangen, dass [Annahme 1.15](#) erfüllt ist. Zusätzlich wird wie in [Abschnitt 3.2](#) eine Halbströmung unter einer λ -arithmetischen Zylinderfunktion

$$\varphi = \sum_{C \in \mathcal{C}_n} k_C \lambda \cdot \mathbb{1}_C \in Z_n$$

betrachtet, sodass man sich im Weiteren auf die Untersuchung der Transformation $\Phi_\lambda : \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ beschränken kann. Da das Verhalten der Ausströmrate bei schrumpfendem Loch von primärem Interesse ist, ist es keine Einschränkung, anzunehmen, dass das Loch A durch einen m -Zylinder $[a_1, \dots, a_m] \in \mathcal{C}_m$ mit $m \geq n$ gegeben ist. Das vom Loch A in der Basis abgeleitete Loch \bar{A} für die Halbströmung wird im Folgenden immer als $\bar{A} := A \times [0, \lambda)$ und nicht als $\pi_1^{-1}(A)$ angesetzt. Da die Ausströmrate nur von der Projektion des Lochs auf die Basis abhängt, hat diese Wahl keine Auswirkungen auf den zu berechnenden Wert. Das Verfahren in [Abschnitt 3.2](#) nutzt in dieser Situation

$$\left\{ \frac{1}{\mu(C)} \cdot \mathbb{1}_{C \times [(k-1)\lambda, k\lambda]} \mid C \in \mathcal{C}_m, k \in \mathbb{N}, 0 < k \leq k_C \right\} \quad (29)$$

als Basis bezüglich derer der Transferoperator $\bar{\mathcal{L}}$ auf dem Unterraum $\bar{Z}_m \subset L_\mu^1(\bar{X})$ dargestellt wird.³⁷ [Gleichung \(9\)](#) auf Seite [36](#) beschreibt, wie $\bar{\mathcal{L}}$ auf diese Basiselemente wirkt. Es fällt auf, dass neben der „vertikalen“ Bewegung vom Typ

$$\mathbb{1}_{[b_1, \dots, b_m] \times [(k-1)\lambda, k\lambda]} \mapsto \mathbb{1}_{[b_1, \dots, b_m] \times [k\lambda, (k+1)\lambda]}$$

bei $k < k_{[b_1, \dots, b_m]}$ die „horizontale“ Bewegung

$$\mathbb{1}_{[b_1, \dots, b_m] \times [(k-1)\lambda, k\lambda]} \mapsto \frac{\mu([b_1, \dots, b_m])}{\mu([b_2, \dots, b_m])} \cdot \mathbb{1}_{[b_2, \dots, b_m] \times [0, \lambda)}$$

bei $k = k_{[b_1, \dots, b_m]}$ dazu führt, dass anstelle einer Indikatorfunktion auf einem m -Zylinder nur noch die eines $(m - 1)$ -Zylinders benötigt wird. Da die Fallunterscheidung auf den Werten $k_{[b_1, \dots, b_m]}$ beruht, sinkt die Zylinderlänge nur bis n und im Allgemeinen nicht weiter.³⁸ Dies bedeutet,

³⁷ In [Abschnitt 3.2](#) wird, anders als in diesem Abschnitt, $m \leq n$ angenommen. Dies liegt daran, dass dort eine Verbesserung der Approximation stetiger Dachfunktionen durch Zylinderfunktionen bei gleichbleibendem, „großem“ Loch angestrebt wird, während hier das Verkleinern des Lochs bei gleichbleibender Dachfunktion im Mittelpunkt steht.

³⁸ Letztendlich entspricht die geringste erlaubte Zylinderlänge hierbei der „horizontalen Auflösung“ der Dachfunktion, also der geringsten Zylinderlänge, bezüglich derer die Dach-

dass sich das Verhalten von $\bar{\mathcal{L}}^k \mathbb{1}$ bereits auf einer von den Indikatorfunktionen von n -Zylindern abstammenden Basis beschreiben lässt.³⁹ Für die Beschreibung von $\bar{\mathcal{L}}_{op}(\cdot) = \bar{\mathcal{L}}((\mathbb{1} - \mathbb{1}_{\bar{A}})(\cdot))$ muss jedoch auch das von $\bar{\mathcal{L}}\mathbb{1}_{\bar{A}}\chi$ für $\chi \in \bar{Z}_n$ abstammende Verhalten beachtet werden. Die entscheidende Beobachtung von **Cristadoro, Knight und Degli Esposti** ist, dass die Beschreibung dieses Verhaltens nicht den Übergang zu einer vollen m -Zylinder-Basis wie in **Gleichung (29)** erfordert, sondern sich bereits durch eine bedeutend geringere Ergänzung einer n -Zylinder-Basis erreichen lässt.

Die Iterierten von $\bar{\mathcal{L}}_{op}$ wirken wie folgt auf ein $\chi \in \bar{Z}_n$:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}_{op}\chi &= \bar{\mathcal{L}}\chi - \bar{\mathcal{L}}(\mathbb{1}_{\bar{A}}\chi) \\ \bar{\mathcal{L}}_{op}^2\chi &= \bar{\mathcal{L}}^2\chi - \bar{\mathcal{L}}^2(\mathbb{1}_{\bar{A}}\chi) - \bar{\mathcal{L}}(\mathbb{1}_{\bar{A}}\bar{\mathcal{L}}_{op}\chi) \\ \bar{\mathcal{L}}_{op}^3\chi &= \bar{\mathcal{L}}^3\chi - \bar{\mathcal{L}}^3(\mathbb{1}_{\bar{A}}\chi) - \bar{\mathcal{L}}^2(\mathbb{1}_{\bar{A}}\bar{\mathcal{L}}_{op}\chi) - \bar{\mathcal{L}}(\mathbb{1}_{\bar{A}}\bar{\mathcal{L}}_{op}^2\chi) \\ &\vdots\end{aligned}$$

Da $\chi \in \bar{Z}_n$ und $\bar{A} \in \bar{C}_m$ mit $m \geq n$, ist $\mathbb{1}_{\bar{A}}\chi$ entweder Null oder ein skalares Vielfaches ungleich Null von $\mathbb{1}_{\bar{A}}$. Gleiches gilt für $\mathbb{1}_{\bar{A}}\bar{\mathcal{L}}_{op}^k\chi$, da $\bar{\mathcal{L}}_{op}^k\chi$ in \bar{Z}_m liegt. Somit reduziert sich die Beschreibung von $\bar{\mathcal{L}}_{op}^k$ im Wesentlichen auf die von $\bar{\mathcal{L}}^k\chi$ für $\chi \in \bar{Z}_n$, welche bereits aus **Abschnitt 3.2** bekannt ist, und jene von $\bar{\mathcal{L}}^k\mathbb{1}_{\bar{A}}$. Es fällt auf, dass $\bar{\mathcal{L}}\mathbb{1}_{\bar{A}}$ konstant auf $\Phi_\lambda(\bar{A})$ ist. Diese Beobachtung setzt sich für $\bar{\mathcal{L}}^2\mathbb{1}_{\bar{A}}$, $\bar{\mathcal{L}}^3\mathbb{1}_{\bar{A}}$, ... analog fort bis schließlich erstmals ein $\bar{\mathcal{L}}^k\mathbb{1}_{\bar{A}}$ in \bar{Z}_n liegt; von diesem Punkt an ist das Verhalten bereits durch jenes von $\bar{\mathcal{L}}$ auf \bar{Z}_n beschrieben. Ein solches k lässt sich explizit angeben als

$$k_0 := \sum_{i=1}^{m-n} k_{[a_i, \dots, a_{i+n-1}]}$$

oder, für $m > n$, mittels eines Punkts $x_0 \in A$ beschreiben als

$$k_0 = \lambda^{-1} \sum_{i=0}^{m-n-1} \varphi \circ \theta^i(x_0) = \lambda^{-1} S_{m-n}(x_0), \quad (30)$$

wobei ausgenutzt wird, dass φ konstant auf n -Zylindern ist.

funktion als Summe von Indikatorfunktionen von Zylindern ebendieser Länge dargestellt werden kann. Für Dachfunktionen, die konstant auf 1-Zylindern sind, ist folglich ein Zurückgehen bis auf 1-Zylinder möglich.

³⁹ Sofern das Loch durch einen Zylinder der Länge $m \leq n$ bestimmt ist, ergibt sich die Situation in **Abschnitt 3.2** und man kann auch \mathcal{L}_{op} bezüglich einer solchen Basis darstellen.

$\bar{\mathcal{L}}_{op}$ bildet folglich nicht nur \bar{Z}_m in sich selbst ab, wie es beim naiven Ansatz genutzt wird, sondern bereits der von $\bar{Z}_n \cup \{\bar{\mathcal{L}}\mathbb{1}_{\bar{A}}, \dots, \bar{\mathcal{L}}^{k_0-1}\mathbb{1}_{\bar{A}}\}$ erzeugte Unterraum von \bar{Z}_m wird von $\bar{\mathcal{L}}_{op}$ in sich selbst abgebildet. Wenn man eine Basis von \bar{Z}_n um $\{\bar{\mathcal{L}}\mathbb{1}_{\bar{A}}, \dots, \bar{\mathcal{L}}^{k_0-1}\mathbb{1}_{\bar{A}}\}$ ergänzt, erhält man ein Erzeugendensystem des neuen Raums; es ist jedoch a priori nicht klar, dass es sich dabei auch um eine Basis handelt, da die Mengen $\Phi_\lambda(\bar{A}), \dots, \Phi_\lambda^{k_0}(\bar{A})$ und jene aus \bar{C}_n zusammengenommen nicht paarweise disjunkt sind, was andernfalls hinreichend für die lineare Unabhängigkeit wäre. Mengen, die in unterschiedlichen horizontalen Streifen $X \times [k\lambda, (k+1)\lambda) \subset \bar{X}$ liegen, sind jedoch offenkundig disjunkt und ihre Indikatorfunktionen folglich linear unabhängig, sodass es ausreicht, die lineare Unabhängigkeit der Elemente zu untersuchen, die im gleichen horizontalen Streifen liegen; von Bedeutung ist also die lineare Unabhängigkeit der Elemente $\mathcal{L}\mathbb{1}_A, \dots, \mathcal{L}^{m-n-1}\mathbb{1}_A$ untereinander und von Z_n . Dazu ist es nötig, eine Anforderung an das das Loch bestimmende Wort $(a_1, \dots, a_m) \in \Sigma_P^m$ zu stellen.

Definition 7.3. Ein Wort $(a_1, \dots, a_m) \in \Sigma_P^m$ heißt *REDUZIERT*, wenn es ein $a'_m \neq a_m$ gibt, sodass $(a_1, \dots, a_{m-1}, a'_m) \in \Sigma_P^m$.⁴⁰ reduziert

Die gewünschte lineare Unabhängigkeit kann nun mittels geringfügig modifizierter Fassungen zweier Lemmata von Lind gezeigt werden.

Lemma 7.4 ([Lin1989, Lemma 2]). *Es sei Annahme 1.14 erfüllt, und es sei $m \geq n$. Das Wort $(a_1, \dots, a_m) \in \Sigma_P^m$ sei reduziert. Für $A := [a_1, \dots, a_m]$ gilt*

$$\min \left\{ k \in \mathbb{N}_0 \mid \mathcal{L}^k \mathbb{1}_A \in Z_n \right\} = m - n.$$

Beweis. Wenn $m = n$, dann ist die Aussage offenkundig wahr. Es sei also im weiteren $m > n$. Man beachte, dass $\mathcal{L}^k \mathbb{1}_A \in \langle \mathbb{1}_{\theta^k A} \rangle_{\mathbb{R}} \subset Z_{m-k}$ für $k < m$, wobei $\langle \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ das \mathbb{R} -Vektorraumzeugnis meint. Somit ergibt sich $\min \{ k \in \mathbb{N} \mid \mathcal{L}^k \mathbb{1}_A \in Z_n \} \leq m - n$. Falls Gleichheit gilt, endet der Beweis an dieser Stelle. Andernfalls liegt bereits $\mathcal{L}^{m-n-1} \mathbb{1}_A$ in Z_n . Da $\mathcal{L}^{m-n-1} \mathbb{1}_A \in \langle \mathbb{1}_{\theta^{m-n-1} A} \rangle_{\mathbb{R}}$ und $\mathcal{L}^{m-n-1} \mathbb{1}_A \neq 0$,⁴¹ gibt es folglich Koeffizienten $\lambda_C \in \{0, 1\}$, mittels derer man $\mathbb{1}_{\theta^{m-n-1} A}$ als $\mathbb{1}_{\theta^{m-n-1} A} = \sum_{C \in C_n} \lambda_C \mathbb{1}_C$ schreiben kann. Da die Mengen $C \in C_n$ nichtleer und paarweise disjunkt sind und $\theta^{m-n-1} A \in C_{n+1}$, folgt, dass $\theta^{m-n-1} A = [a_{m-n}, \dots, a_m] = C$

⁴⁰ Die Bezeichnung *reduziert* kommt daher, dass andernfalls das Wort (a_1, \dots, a_m) bereits durch seine ersten $m - 1$ Einträge vollständig bestimmt ist.

⁴¹ $\mathcal{L}^{m-n-1} \mathbb{1}_A \neq 0$ gilt, weil $\mu(A) > 0$ und das Anwenden des Transferoperators das Integral nicht verändert.

für ein $C \in C_n$ gilt. Dieses C muss zwingend gleich $[a_{m-n}, \dots, a_{m-1}]$ sein. Es gilt jedoch

$$[a_{m-n}, \dots, a_{m-1}] = \bigcup_{\substack{s \in S \\ p_{a_{m-1}, s} > 0}} [a_{m-n}, \dots, a_{m-1}, s] \supset [a_{m-n}, \dots, a_m],$$

und da das Wort (a_1, \dots, a_m) als reduziert vorausgesetzt wurde, folgt, dass $[a_{m-n}, \dots, a_m]$ eine echte Teilmenge von $[a_{m-n}, \dots, a_{m-1}]$ ist, was der zuvor gefolgerten Gleichheit widerspricht. Somit kann das gesuchte Minimum nicht ungleich $m - n$ sein. \square

Lemma 7.5 ([Lin1989, Lemma 3]). *Es sei Annahme 1.14 erfüllt, und es sei $m > n$. Das Wort $(a_1, \dots, a_m) \in \Sigma_p^m$ sei reduziert. Für $A := [a_1, \dots, a_m]$ gilt: Die Funktionen $\mathbb{1}_A, \mathcal{L}\mathbb{1}_A, \dots, \mathcal{L}^{m-n-1}\mathbb{1}_A$ sind linear unabhängig untereinander und von Z_n .*

Beweis. Man nehme an, dass für ein $\chi \in Z_n$ gilt

$$0 = \lambda_0 \mathbb{1}_A + \lambda_1 \mathcal{L}\mathbb{1}_A + \dots + \lambda_{m-n-1} \mathcal{L}^{m-n-1} \mathbb{1}_A + \chi$$

und nicht alle Koeffizienten λ_i gleich Null sind. Es sei k minimal mit der Eigenschaft $\lambda_k \neq 0$. Wenn man auf diese Funktion nun den Transferoperator \mathcal{L} der Basistransformation $(m - n - k - 1)$ -mal anwendet, erhält man

$$0 = \lambda_k \mathcal{L}^{m-n-1} \mathbb{1}_A + \underbrace{\lambda_{k+1} \mathcal{L}^{m-n} \mathbb{1}_A + \dots + \lambda_{m-n-1} \mathcal{L}^{2m-2n-k-2} \mathbb{1}_A + \mathcal{L}^{m-n-k-1} \chi}_{\in Z_n}.$$

Da gemäß Lemma 7.4 $\mathcal{L}^{m-n} \mathbb{1}_A \in Z_n$ gilt und bekannt ist, dass $\mathcal{L}Z_n \subset Z_n$, kann man schließen, dass

$$\lambda_k \mathcal{L}^{m-n-1} \mathbb{1}_A \in Z_n,$$

was jedoch Lemma 7.4 widerspricht. Es kann also kein k mit $\lambda_k \neq 0$ geben. Folglich sind die betrachteten Funktionen linear unabhängig. \square

Die bis hierher gemachten Beobachtungen werden im folgenden Lemma zusammengefasst, wobei nun wieder auf die Ebene der diskretisierten Halbströmung zurückgegangen wird.

Lemma 7.6. *Es sei [Annahme 1.15](#) erfüllt und die Dachfunktion φ sei arithmetisch. Das Loch A sei durch ein reduziertes Wort $(a_1, \dots, a_m) \in \Sigma_{\mathbb{P}}^m$ mit $m \geq n$ bestimmt und k_0 sei wie in [Gleichung \(30\)](#). Wenn $k_0 > 1$,⁴² so ist*

$$\left\{ \frac{1}{\bar{\mu}(\bar{C})} \cdot \mathbb{1}_{\bar{C}} \mid \bar{C} \in \bar{C}_n \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\bar{\mu}(\bar{\mathcal{L}}^k \mathbb{1}_{\bar{A}})} \bar{\mathcal{L}}^k \mathbb{1}_{\bar{A}} \mid k = 1, \dots, k_0 - 1 \right\} \quad (31)$$

die Basis eines Unterraums U von $L_{\bar{\mu}}^1(\bar{X})$, der von $\bar{\mathcal{L}}_{op}$ in sich selbst abgebildet wird und das Element $\mathbb{1}$ enthält.

Die Skalierung der Basiselemente wurde hierbei mit dem Ziel einer möglichst einfachen Gestalt der sich für die Beschreibung von $\bar{\mathcal{L}}$ auf U ergebenden Matrix durchgeführt. Man beachte, dass nach [Satz 3.8](#) $\bar{\mu}(\bar{\mathcal{L}}^k \mathbb{1}_{\bar{A}}) = \bar{\mu}(\mathbb{1}_{\bar{A}}) = \bar{\mu}(\bar{A})$ für alle $k \in \mathbb{N}$. In [Abschnitt 3.2](#) wurde die Matrix für $\bar{\mathcal{L}}_{op}$ aufgestellt, indem zuerst jene für $\bar{\mathcal{L}}$ angegeben wurde und dann gewisse Zeilen zu Null wurden, um dem Loch Rechnung zu tragen. Da $\bar{\mathcal{L}}_{op}$ nun jedoch nicht auf dem vollen Raum \bar{Z}_m dargestellt wird, ist diese Auslöschung von Matrixelementen nicht möglich, und es werden negative Einträge auftreten, die die eingangs beschriebene Kopplung realisieren.

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass $k_0 > 1$, damit die Basisdarstellung aus [Lemma 7.6](#) verwendet werden kann, ohne dass eine Fallunterscheidung nötig wird, da für $k_0 \leq 1$ die zweite Menge in [Gleichung \(31\)](#) leer wäre.

Es sei \bar{M} die Matrix, die $\bar{\mathcal{L}}$ auf \bar{Z}_n bezüglich der Basis

$$\left\{ \frac{1}{\bar{\mu}(\bar{C})} \cdot \mathbb{1}_{\bar{C}} \mid \bar{C} \in \bar{C}_n \right\}$$

⁴² $m > n$ ist eine notwendige Bedingung für $k_0 > 1$. $m > n + 1$ ist hinreichend, bei $m = n + 1$ hängt es von der Dachfunktion ab.

beschreibt.⁴³ Dann wird die Wirkung von $\bar{\mathcal{L}}_{op}$ auf U bezüglich der in [Lemma 7.6](#) angegebenen Basis durch die Matrix

$$\bar{C}_n \left(\begin{array}{ccc|ccc} \bar{C}_n & & & \bar{\mathcal{L}}\mathbb{1}_{\bar{A}} & \cdots & \bar{\mathcal{L}}^{k_0-1}\mathbb{1}_{\bar{A}} \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & \bar{M} & & 0 & & \mathbf{0} \\ & & & -\alpha & & \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \\ \hline \bar{\mathcal{L}}\mathbb{1}_{\bar{A}} & & \mathbf{0} & -c_1 & 1 & \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots \\ \bar{\mathcal{L}}^{k_0-1}\mathbb{1}_{\bar{A}} & & 0 \cdots 0 & -c_{k_0-1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{array} \right) \leftarrow [a_1, \dots, a_n] \times [0, \lambda]$$

\uparrow
 $[a_{(m-n+1)}, \dots, a_m] \times [0, \lambda]$

beschrieben, welche mit \bar{M}_{op} bezeichnet wird.⁴⁴ Wie in [Abschnitt 3.1](#) entspricht die Operation von $\bar{\mathcal{L}}_{op}$ der Rechtsmultiplikation der zugehörigen Matrix an den die Funktion beschreibenden Vektor. Die positiven Einträge stammen vom $\bar{\mathcal{L}}(\cdot)$ -Anteil von $\bar{\mathcal{L}}_{op}(\cdot) = \bar{\mathcal{L}}(\cdot) - \bar{\mathcal{L}}(\mathbb{1}_{\bar{A}} \cdot (\cdot))$, denn neben dem bereits bekannten \bar{M} -Anteil gilt

$$\bar{\mathcal{L}} \left(\frac{1}{\bar{\mu}(\bar{A})} \bar{\mathcal{L}}^k \mathbb{1}_{\bar{A}} \right) = \frac{1}{\bar{\mu}(\bar{A})} \bar{\mathcal{L}}^{k+1} \mathbb{1}_{\bar{A}} = \frac{1}{\bar{\mu}(\bar{\mathcal{L}}^{k+1} \mathbb{1}_{\bar{A}})} \bar{\mathcal{L}}^{k+1} \mathbb{1}_{\bar{A}}$$

⁴³ Es sei darauf hingewiesen, dass sich diese Basis von der in [Abschnitt 3.2](#) verwendeten im Falle einer λ -arithmetischen Dachfunktion nur durch einen Skalierungsfaktor λ unterscheidet. Die sich ergebenden Matrizen sind folglich gleich.

⁴⁴ Man beachte, dass die Größe dieser Matrix bei fester Dachfunktion $\varphi \in Z_n$ nur linear mit der Lochtiefe anwächst und nicht exponentiell wie die Matrix aus [Abschnitt 3.2](#).

für $0 \leq k < k_0 - 1$, woraus sich die Einsen auf der Nebendiagonale im Block rechts unten ergeben, und

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} \left(\frac{1}{\bar{\mu}(\bar{A})} \bar{\mathcal{L}}^{k_0-1} \mathbb{1}_{\bar{A}} \right) &= \frac{1}{\bar{\mu}(\bar{A})} \bar{\mathcal{L}}^{k_0} (\mathbb{1}_{\bar{A}}) \\ &= \frac{1}{\lambda \cdot \mu(\bar{A})} \left(\prod_{k=1}^{m-n} \frac{\mu([a_k])}{\mu([a_{k+1}])} p_{a_k, a_{k+1}} \right) \cdot \mathbb{1}_{\Phi_\lambda^{k_0}(\bar{A})} \\ &= \frac{\mu([a_1, \dots, a_{m-n+1}])}{\lambda \cdot \mu([a_1, \dots, a_m]) \cdot \mu([a_{m-n+1}])} \cdot \mathbb{1}_{\Phi_\lambda^{k_0}(\bar{A})} \\ &= \frac{1}{\bar{\mu}([a_{m-n+1}, \dots, a_m] \times [0, \lambda])} \cdot \mathbb{1}_{[a_{m-n+1}, \dots, a_m] \times [0, \lambda]} \end{aligned}$$

für $k = k_0 - 1$, woraus die 1 in der letzten Zeile entsteht. Die Einträge mit den Minuszeichen stammen vom $-\bar{\mathcal{L}}(\mathbb{1}_{\bar{A}} \cdot (\cdot))$ -Anteil, denn

$$\bar{\mathcal{L}} \left(\mathbb{1}_{\bar{A}} \cdot \frac{1}{\bar{\mu}(\bar{C})} \mathbb{1}_{\bar{C}} \right) = \begin{cases} 0 & , \bar{C} \cap \bar{A} = \emptyset \\ \frac{1}{\bar{\mu}(\bar{C})} \mathcal{L} \mathbb{1}_{\bar{A}} & , \bar{C} = [a_1, \dots, a_n] \times [0, \lambda), \end{cases}$$

für $\bar{C} \in \bar{\mathcal{C}}_n$, woraus sich

$$\alpha := \frac{\bar{\mu}(\bar{A})}{\bar{\mu}([a_1, \dots, a_n] \times [0, \lambda])} = \frac{\mu([a_1, \dots, a_m])}{\mu([a_1, \dots, a_n])} = p_{a_n, a_{n+1}} \cdots p_{a_{m-1}, a_m}$$

ergibt, und

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} \left(\mathbb{1}_{\bar{A}} \cdot \frac{1}{\bar{\mu}(\bar{A})} \bar{\mathcal{L}}^k \mathbb{1}_{\bar{A}} \right) &= \begin{cases} 0 & , \Phi_\lambda^k \bar{A} \cap \bar{A} = \emptyset \\ \left(\prod_{j=1}^k \frac{\mu([a_j])}{\mu([a_{j+1}])} p_{a_j, a_{j+1}} \right) \cdot \frac{1}{\bar{\mu}(\bar{A})} \cdot \bar{\mathcal{L}} \mathbb{1}_{\bar{A}} & , \Phi_\lambda^k \bar{A} \cap \bar{A} \neq \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

für $k = 1, \dots, k_0 - 1$, woraus sich

$$c_k = 0$$

im ersten Fall, beziehungsweise

$$c_k = \frac{\mu([a_1, \dots, a_{l+1}])}{\mu([a_{l+1}])} = p_{a_1, a_2} \cdots p_{a_l, a_{l+1}}$$

im zweiten Fall ergibt, wobei l diejenige Zahl ist, für die

$$S_l \varphi(x_0) = \sum_{j=0}^{l-1} \varphi \circ \theta^j(x_0) = \lambda k$$

gilt. Hierbei ist $x_0 \in A$ wie in [Gleichung \(30\)](#) auf Seite 84.

Bemerkung 7.7. Beide Fälle lassen sich in der Schreibweise

$$c_k = \frac{\bar{\mu}(\bar{A} \cap \Phi_\lambda^k \bar{A})}{\bar{\mu}(\Phi_\lambda^k \bar{A})}$$

zusammenfassen. Diese zeigt jedoch nicht in gleicher Klarheit auf, dass die c_k aus den Einträgen der Übergangsmatrix ermittelt werden können, ohne dass eine explizite Bestimmung des Maßes μ notwendig ist.

Nachdem nun eine Matrixdarstellung \bar{M}_{op} von $\bar{\mathcal{L}}_{op}$ auf U vollständig ermittelt wurde, lässt sich aus dieser die Ausströmrates mittels des betragsmäßig größten Eigenwerts ermitteln:

$$\rho(A, \lambda^{-1} \varphi) = -\log r(\bar{M}_{op}) \quad \text{bzw.} \quad \rho(A, \varphi) = -\frac{1}{\lambda} \log r(\bar{M}_{op})$$

Man beachte, dass bei dieser Form der Matrixdarstellung nur Löcher verwendet werden können, die m -Zylinder mit $m \geq n$ sind. Im Gegensatz dazu können mit der Matrixdarstellung aus [Abschnitt 3.2](#) auch Löcher, die eine Vereinigung von Zylindermengen sind, beschrieben werden. Wie bereits am Ende von [Abschnitt 3.1](#) angedeutet wurde, kann zur Ermittlung der Eigenwerte ungleich Null außer dem charakteristischen Polynom $\det(z \cdot \text{id} - \bar{M}_{op})$ auch die verwandte Größe $\det(\text{id} - z \cdot \bar{M}_{op})$ herangezogen werden. Letztere Funktion hat genau die Inversen der Nullstellen ungleich Null des charakteristischen Polynoms als Nullstellen. Der betragsmäßig größte Eigenwert von \bar{M}_{op} kann folglich als betragsmäßig kleinste Nullstelle von

$$\zeta_{op}^{-1}(z) := \det(\text{id} - z \cdot \bar{M}_{op})$$

bestimmt werden.

Um die Determinante leicht zu berechnen, ist es zweckmäßig, die unterste Zeile von $\text{id} - z \cdot \bar{M}_{op}$ mit z zu multiplizieren und zur darüberliegenden Zeile zu addieren, dann diese mit z zu multiplizieren und zur darüberliegenden Zeile zu addieren und in dieser Weise weiter zu verfahren, bis man schließlich zu jener Zeile, die c_1 enthält, addiert hat.

Anschließend entwickelt man die Determinante nach eben jener Zeile. Im Folgenden werden dabei die Bezeichnungen

$$\zeta_{cl}^{-1}(z) := \det(\text{id} - z \cdot \bar{M}) \tag{32}$$

$$\phi_A(z) := 1 + \sum_{k=1}^{k_0-1} c_k z^k$$

$$C_{k,l}(z) := (-1)^{k+l} \det[\text{id} - z \cdot \bar{M}]_{k,l}$$

$$t := \text{Index der Zeile zu } [a_1, \dots, a_n] \times [0, \lambda)$$

$$r := \text{Index der Spalte zu } [a_{(m-n+1)}, \dots, a_m] \times [0, \lambda)$$

$$k_0 := \lambda^{-1} S_{m-n} \varphi(x_0) \quad \text{für ein beliebiges } x_0 \in A$$

$$\alpha := p_{a_n, a_{n+1}} \cdots p_{a_{m-1}, a_m}$$

verwendet, wobei $C_{k,l}$ den Kofaktor der Matrix $\text{id} - z \cdot \bar{M}$ an der Stelle (k, l) bezeichnet.⁴⁵ Man beachte, dass die Funktionen $\zeta_{cl}^{-1}(z)$ und $C_{k,l}(z)$ unabhängig von der Wahl des Lochs sind. Es ergibt sich somit

$$\zeta_{op}^{-1}(z) = \det(\text{id} - z \cdot \bar{M}_{op})$$

$$= \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & \text{id} - z \cdot \bar{M} & & 0 & & 0 \\ & & & \alpha z & & \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 + c_1 z & -z & \\ & & & \vdots & 1 & \ddots \\ & & & & & \ddots & -z \\ 0 \cdots 0 & -z & 0 \cdots 0 & c_{k_0-1} z & & & 1 \end{array} \right)$$

⁴⁵ Details zum Determinantenkalkül finden sich beispielsweise bei Oeljeklaus und Remmert [OR1974].

$$\begin{aligned}
&= \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & 0 \\ \text{id} - z \cdot \overline{M} & & & \alpha z & & \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \end{array} \right) \\
&= \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \phi_A(z) & 0 & \\ & -z^{k_0-1} & & \vdots & 1 & \ddots \\ 0 & \vdots & 0 & c_{k_0-2}z + c_{k_0-1}z^2 & \ddots & 0 \\ & -z^2 & & c_{k_0-1}z & & 1 \\ & -z & & & & \end{array} \right) \\
&= \det(\text{id} - z \cdot \overline{M}) \cdot \phi_A(z) \cdot 1 \\
&\quad - (-1)^{t+r} \det[\text{id} - z \cdot \overline{M}]_{t,r} \cdot \alpha z \cdot (-z^{k_0-1}) \\
&= \zeta_{cl}^{-1}(z) \cdot \phi_A(z) + C_{t,r} \cdot \alpha \cdot z^{k_0}.
\end{aligned}$$

Die Gestalt des Lochs hat über die Indizes t, r von $C_{t,r}$ sowie die Funktion ϕ_A Einfluss auf ζ_{op}^{-1} .

Zusammenfassung 7.8. Die Ausströmrates $\rho(A, \lambda^{-1}\varphi)$ ist gegeben durch den Logarithmus der betragsmäßig kleinsten Nullstelle von

$$\zeta_{op}^{-1} = \zeta_{cl}^{-1}(z) \cdot \phi_A(z) + C_{t,r}(z) \cdot \alpha \cdot z^{k_0}, \quad (33)$$

wobei die Bezeichnungen wie in [Gleichung \(32\)](#) zu verstehen sind.

7.1.2 Anwendung auf schrumpfende Löcher

Wie bereits in [Abschnitt 7.1.1](#) werde im Folgenden vorausgesetzt, dass [Annahme 1.15](#) erfüllt und die Dachfunktion

$$\varphi = \sum_{C \in \mathcal{C}_n} k_C \lambda \cdot \mathbb{1}_C \in Z_n$$

λ -arithmetisch ist. Auch die Bezeichnungen aus [Abschnitt 7.1.1](#) werden weiterverwendet, insbesondere jene aus [Gleichung \(32\)](#).

Wenn die lokale Ausströmrates bezüglich eines Markovshifts als Basis-
transformation betrachtet wird, so entspricht eine Folge von schrumpfen-
den Umgebungen $B_r(x)$ eines Punkts $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$ einer
Folge $[x_1], [x_1, x_2], \dots$ von immer längeren Zylindern. Wenn x ein pe-
riodischer Punkt von Primperiode p ist,⁴⁶ der durch Wiederholungen
eines endlichen, reduzierten Worts $w = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ entsteht, dann
kann man für Löcher der Form

$$A_v := [x_1, \dots, x_{vp}]$$

eine verkürzte Darstellung der Funktion $\phi_{A_v} = 1 + \sum_{k=1}^{k_0-1} c_k z^k$ angeben,
die das Summenzeichen eliminiert, da in dieser Situation mehr über die
 c_k bekannt ist. Zur Vereinfachung der Rechnungen nehme man an, dass
die horizontale Auflösung n der Dachfunktion die Bedingung $n \geq p$
erfüllt, die Dachfunktion also als Summe von Indikatorfunktionen von
Zylindern der Länge $n \geq p$ gegeben ist, und außerdem $n \in p\mathbb{N}$ gilt.⁴⁷
Es sei

$$m := vp \tag{34}$$

$$o := \lambda^{-1} \cdot S_p \varphi(x)$$

$$k_0 := \lambda^{-1} \cdot S_{m-n} \varphi(x) = \left(v - \frac{n}{p} \right) \cdot o$$

und wie in [Lemma 7.6](#) werde $k_0 > 1$ vorausgesetzt, was bedeutet, dass
 v hinreichend groß sein muss.⁴⁸ Da letztlich schrumpfende Löcher und

⁴⁶ Ein Punkt x heißt periodisch, wenn es ein $k > 0$ mit $\theta^k(x) = x$ gibt. Das kleinste derartige k wird als Primperiode von x bezeichnet.

⁴⁷ Die Anforderung $n \geq p$ an die horizontale Auflösung der Dachfunktion ist keine Ein-
schränkung für mögliche Dachfunktionen, da jede Dachfunktion, die als Summe von Indi-
katorfunktionen von Zylindern geringerer Länge gegeben ist, auch als Summe von Indika-
torfunktionen größerer Länge geschrieben werden kann. Sie dient nur dazu, eine einfacher
zu handhabende Gestalt der betrachteten Polynome zu erreichen.

⁴⁸ Die Bedingung $n \in p\mathbb{N}$ sorgt dafür, dass $S_{m-n} \varphi(x)$ und damit k_0 eine einfachere Gestalt
erhalten, da $m - n \in p\mathbb{N}$ und folglich $S_{m-n} \varphi(x)$ ein Vielfaches von $S_p \varphi(x)$ ist.

folglich der Fall $\nu \rightarrow \infty$ betrachtet werden soll, ist dies keine Einschränkung. Es ergibt sich

$$c_{ko} = c_o^k = \left(p_{a_1, a_2} \cdots p_{a_{p-1}, a_p} \cdot p_{a_p, a_1} \right)^k \quad \text{für } 0 \leq k \cdot o < k_0. \quad (35)$$

Da p die Primperiode von x bezüglich θ ist und folglich o die Primperiode von $(x, 0)$ bezüglich Φ_λ , gilt

$$c_j = 0 \quad \text{wenn } j \notin o\mathbb{N}_0, \quad (36)$$

also für all jene c_j , die nicht von [Gleichung \(35\)](#) erfasst werden.⁴⁹ Unter Verwendung von

$$s := \min \{k \in \mathbb{N} | ko \geq k_0\} = \nu - \frac{n}{p}$$

und

$$\mu(A_\nu) = \frac{\mu([w])}{c_o} \cdot c_o^\nu,$$

ergibt sich

$$c_o^s = \frac{\mu(A_\nu)}{\mu([w])} \cdot c_o^{1-n/p} = \frac{\mu_\nu}{\mu_w} \cdot c_o^{1-n/p}, \quad (37)$$

wobei zur Verkürzung der Notation die Schreibweisen

$$\begin{aligned} \mu_\nu &:= \mu(A_\nu) \\ \mu_w &:= \mu([w]) \\ \mu_t &:= \mu([a_1, \dots, a_n]) \end{aligned}$$

⁴⁹ Die Bedingung $n \geq p$ stellt sicher, dass es keine Probleme für c_j mit $j > k_0 - o$ gibt, denn für solche j würden andernfalls auch Mengen $\Phi_\lambda^j \bar{A}$ der Gestalt $[a_1, \dots, a_m] \times [0, \lambda)$ mit $m - l + 1 < p$ vorkommen, die auf Grund der geringen Länge des Zylinders $[a_1, \dots, a_m]$ einen nichtleeren Schnitt mit \bar{A} haben könnten, obwohl $[a_1, \dots, a_m]$ nicht von der Form $[w, \dots, w]$ ist. Nur falls die Situation $[a_1, \dots, a_p] \cap \theta^k([a_1, \dots, a_p]) = \emptyset$ für $1 \leq k < p$ gegeben wäre, könnte man allgemein $[w, \dots, w] \cap \theta^k([w, \dots, w]) \neq \emptyset$ für $k \notin p\mathbb{N}$ und somit $c_j = 0$ für $j \notin o\mathbb{N}_0$ und $j > k_0 - o$ folgern (für $j \leq k_0 - o$ ist die Situation jedoch unproblematisch, da p die Primperiode von x ist und die zu betrachtenden Zylinder mindestens die Länge p haben). Eine andere Möglichkeit, diesem Problem zu begegnen, wäre es, $j \leq k_0 - o$ als Einschränkung in [Gleichung \(36\)](#) aufzunehmen und jene c_j mit $j > k_0 - o$ gesondert zu betrachten. Dies würde jedoch zu unhandlichen Resttermen und Fallunterscheidungen führen, welche man zwar für numerische Effizienz möglicherweise in Kauf zu nehmen bereit sein könnte, die jedoch bei einer theoretischen Untersuchung des Sachverhalts stören, sodass stattdessen auf die Einführung der Bedingung $n \geq p$ zurückgegriffen wird. In [\[CKDE2013, Abschnitt 4\]](#), wo nur die Situation $n = 1$ betrachtet wird, findet sich keine Entsprechung zu dieser Bemerkung. Dies ist eine Auslassung in [\[CKDE2013\]](#), die dazu führt, dass die dortige Gleichung (9) nicht für alle Löcher gilt, sondern nur für solche, bei denen $[a_1, \dots, a_p] \cap \theta^k([a_1, \dots, a_p]) = \emptyset$ für $1 \leq k < p$ erfüllt ist.

eingeführt werden. Hiermit reduziert sich der Ausdruck für ϕ_{A_ν} zu

$$\begin{aligned}
 \phi_{A_\nu}(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{k_0-1} c_k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{s-1} c_{k_0} z^{k_0} \\
 &= \frac{1 - (c_0 z^0)^s}{1 - c_0 z^0} \\
 &= \frac{1 - \frac{\mu_\nu}{\mu_w} \cdot c_0^{1-n/p} z^{0s}}{1 - c_0 z^0}.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Da bekannt ist, dass das Polynom ζ_{cl}^{-1} die Nullstelle 1 hat,⁵⁰ kann man

$$\zeta_{cl}^{-1}(z) = (1 - z) \cdot G(z) \tag{39}$$

mit einem gewissen Polynom $G(z)$ schreiben, was sich als sinnvoll erweisen wird, da für schrumpfendes Loch die betragsmäßig kleinste Nullstelle von ζ_{op}^{-1} gegen 1 streben muss, wenn die lokale Ausströmrates in x existiert. Man kann nun die Gleichungen (33), (37), (38) und (39) zusammenführen und die Schreibweise $\alpha = \mu_\nu / \mu_t$ ausnutzen. Da letztlich die Situation $\nu \rightarrow \infty$ betrachtet werden soll, wird das Polynom ζ_{op}^{-1} im Folgenden auch als f_ν bezeichnet, um die Abhängigkeit vom durch ν bestimmten Loch klarer hervortreten zu lassen.

$$\begin{aligned}
 f_\nu(z) &:= \zeta_{op}^{-1}(z) \\
 &= \zeta_{cl}^{-1}(z) \cdot \phi_A(z) + C_{t,r}(z) \cdot \alpha \cdot z^{k_0} \\
 &= (1 - z) \cdot G(z) \cdot \frac{1 - \frac{\mu_\nu}{\mu_w} \cdot c_0^{1-n/p} z^{0s}}{1 - c_0 z^0} + C_{t,r}(z) \cdot \frac{\mu_\nu}{\mu_t} \cdot z^{k_0} \\
 &= \underbrace{(1 - z) \cdot G(z) \cdot \frac{1}{1 - c_0 z^0}}_{=: g_1(z)} \\
 &\quad + \mu_\nu \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\mu_t} \cdot C_{t,r}(z) \cdot z^{k_0} - \frac{c_0^{1-n/p}}{\mu_w} \cdot (1 - z) \cdot G(z) \cdot \frac{z^{0s}}{1 - c_0 z^0} \right)}_{=: g_{2,\nu}(z)}
 \end{aligned} \tag{40}$$

Man beachte, dass g_1 nicht von ν abhängt und $g_{2,\nu}$ zwar durch k_0 und s von ν abhängig ist, jedoch keinen μ_ν -Term enthält.

Man fixiere ein $k \in \mathbb{N}$. Es ist nun das Ziel, die betragsmäßig kleinste Nullstelle von f_ν in Abhängigkeit von μ_ν zu beschreiben. Zu diesem

⁵⁰ Die Nullstellen von ζ_{cl}^{-1} entsprechen den Inversen der Eigenwerte ungleich Null der stochastischen Matrix \bar{M} .

Zweck sollen (in Abhängigkeit von ν) Ausdrücke s_1, \dots, s_k gefunden werden, die die Bedingung $s_j(\nu) \cdot \mu_\nu \rightarrow 0$ für $\nu \rightarrow \infty$ erfüllen, und für die $f_\nu(1 + s_1\mu_\nu + s_2\mu_\nu^2 + \dots + s_k\mu_\nu^k) = o(\mu_\nu^k)$ gilt, sodass die gesuchte Nullstelle durch $1 + s_1\mu_\nu + s_2\mu_\nu^2 + \dots + s_k\mu_\nu^k$ gut approximiert wird. Die Idee besteht darin, dass man $f_\nu(z)$ um 1 als Taylorpolynom mit Restglied schreibt, dann $z = 1 + s_1\mu_\nu + s_2\mu_\nu^2 + \dots + s_k\mu_\nu^k$ einsetzt, den sich ergebenden Ausdruck als Polynom in μ_ν ausdrückt und s_1, \dots, s_k so wählt, dass die Koeffizienten vor μ_ν^l für $0 \leq l \leq k$ zu Null werden.

Lemma 7.9. *Es existiere die lokale Ausströmrates in $x = (w, w, w, \dots)$.⁵¹ Es sei $z_\nu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die betragsmäßig kleinste Nullstelle von f_ν . Dann gibt es ein $\gamma \in \mathbb{R}$ und ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $\nu \geq \nu_0$ gilt*

$$1 \leq z_\nu < 1 + \gamma\mu_\nu.$$

Beweis. Da $z_\nu = e^{\rho(A_\nu, \lambda^{-1}\varphi)}$ gilt, und man weiß, dass die Ausströmrates $\rho(A_\nu, \lambda^{-1}\varphi)$ nicht negativ ist, folgt $1 \leq z_\nu$. Aus der Annahme über die Existenz der lokalen Ausströmrates in x ergibt sich

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\rho(A_\nu, \lambda^{-1}\varphi)}{\mu_\nu} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log z_\nu}{\mu_\nu} = \rho(x, \lambda^{-1}\varphi).$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Es gibt nun ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $\nu \geq \nu_0$ gilt

$$\log z_\nu < \left(\rho(x, \lambda^{-1}\varphi) + \varepsilon\right) \cdot \mu_\nu$$

und

$$1 \leq z_\nu < 1 + \varepsilon.$$

Für $z \in (1, 1 + \varepsilon]$ gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} \cdot z - \frac{1}{1 + \varepsilon} < \log z,$$

woraus sich für $\nu \geq \nu_0$ ergibt, dass

$$z_\nu < 1 + \underbrace{(1 + \varepsilon) \cdot \left(\rho(x, \lambda^{-1}\varphi) + \varepsilon\right)}_{=:\gamma} \cdot \mu_\nu.$$

□

⁵¹ Wegen [Korollar 6.8](#) impliziert die Existenz der lokalen Ausströmrates in x bezüglich der Basis die Existenz der lokalen Ausströmrates bezüglich der Halbströmung.

f_ν ist eine rationale Funktion in z , die in $z = 1$ keinen Pol hat. Folglich gibt es eine Taylorentwicklung in diesem Punkt. Mit Lagrangeschem Restglied⁵² ergibt sich

$$f_\nu(z) = f_\nu(1) + \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} f_\nu^{(l)}(1) \cdot (z-1)^l + \frac{1}{(k+1)!} f_\nu^{(k+1)}(\xi) \cdot (z-1)^{k+1}$$

mit einem $\xi = \xi(z) \in (1, z)$. Für

$$z = 1 + s_1\mu_\nu + s_2\mu_\nu^2 + \dots + s_k\mu_\nu^k$$

erhält man, nach Potenzen von μ_ν sortiert,

$$\begin{aligned} f_\nu(z) = & \underbrace{g_1(1)}_{=0} & (41) \\ & + \mu_\nu \cdot (s_1 g_1'(1) + g_{2,\nu}(1)) \\ & + \mu_\nu^2 \cdot \left(s_2 g_1'(1) + \frac{1}{2} s_1^2 g_1''(1) + g_{2,\nu}'(1) \cdot s_1 \right) \\ & + \mu_\nu^3 \cdot \dots \\ & + \dots \end{aligned}$$

sodass man rekursiv die s_j bestimmen kann, für die die Koeffizienten vor $\mu_\nu, \dots, \mu_\nu^k$ Null werden, da $g_1'(1) = -G(1) / (1 - c_0) \neq 0.53$

Fakt 7.10. Allgemein ist s_i für $1 \leq i \leq k$ durch

$$\begin{aligned} s_i = & -\frac{1}{g_1'(1)} \cdot \left(\sum_{l=2}^k \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_l=l \\ j_1+2j_2+\dots+i \cdot j_i=i}} \frac{1}{j_1! \dots j_l!} \cdot g_1^{(l)}(1) \cdot s_1^{j_1} \dots s_i^{j_i} \right) \\ & - \frac{1}{g_1'(1)} \cdot \left(\sum_{l=0}^k \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_l=l \\ j_1+2j_2+\dots+i \cdot j_i=i-1}} \frac{1}{j_1! \dots j_l!} \cdot g_{2,\nu}^{(l)}(1) \cdot s_1^{j_1} \dots s_i^{j_i} \right) \end{aligned}$$

gegeben, wobei g_1 und g_2 wie in Gleichung (40) sind und die j_1, \dots, j_i aus \mathbb{N}_0 stammen.

Von besonderem Interesse sind s_1 und s_2 . Der folgende Zusammenhang zwischen $C_{t,r}(1)$, μ_t und $G(1)$ hilft, die zugehörigen Terme zu vereinfachen.

⁵² Siehe beispielsweise [AE2006, S. 358].

⁵³ G kann keine Nullstelle in 1 haben, da sich die Irreduzibilität der Übergangsmatrix P des Markovshifts auf die Matrix \bar{M} überträgt, welche folglich als stochastische Matrix gemäß des Satzes von Perron-Frobenius (A.4) einen einfachen Eigenwert 1 hat.

Lemma 7.11. Es gilt $C_{t,r}(1) = \frac{1}{\mu(\varphi)} \cdot \lambda \cdot \mu_t \cdot G(1) = \frac{1}{\mu(\lambda^{-1}\varphi)} \cdot \mu_t \cdot G(1)$.

Beweis. Diese Aussage folgt aus [Satz A.11](#) unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Eigenvektor \vec{v} in [Satz A.11](#) gemäß der in [Definition 1.8](#) geschilderten Konstruktion des invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßes eines Markovshifts gerade das Wahrscheinlichkeitsmaß $\bar{\mu}/\mu(\varphi)$ auf n -Zylindern beschreibt. \square

Nun kann man s_1 und s_2 wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= -\frac{g_{2,\nu}(1)}{g_1'(1)} = \frac{C_{t,r}(1)}{\mu_t \cdot G(1)} \cdot (1 - c_o) & (42) \\
 &= \frac{1 - c_o}{\mu(\lambda^{-1}\varphi)} \\
 s_2 &= -\frac{\frac{1}{2}s_1^2 g_1''(1) + g_{2,\nu}'(1) \cdot s_1}{g_1'(1)} \\
 &= \frac{1 - c_o}{G(1)} \cdot \left(-\frac{1}{2}s_1^2 \left(2 \cdot \frac{G'(1)}{1 - c_o} + 2 \cdot \frac{G(1) \cdot c_o o}{(1 - c_o)^2} \right) + s_1 \cdot \frac{C_{t,r}(1)}{\mu_t} \cdot k_0 \right. \\
 &\quad \left. + s_1 \cdot \frac{C_{t,r}'(1)}{\mu_t} + s_1 \frac{c_o^{1-n/p} G(1)}{\mu_w \cdot (1 - c_o)} \right) \\
 &= \frac{(1 - c_o)^2}{\mu(\lambda^{-1}\varphi)^2} \cdot \left(k_0 - \frac{G'(1)}{G(1)} - \frac{c_o o}{1 - c_o} + \frac{C_{t,r}'(1)}{C_{t,r}(1)} + \frac{\mu(\lambda^{-1}\varphi) \cdot c_o^{1-n/p}}{\mu_w \cdot (1 - c_o)} \right)
 \end{aligned}$$

Lemma 7.12. Es sei $\epsilon \in (0, 1)$ und $\gamma \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq z \leq 1 + \gamma \mu_\nu} \left| g_1^{(l)}(z) \right| \cdot \epsilon^\nu &= 0 \\
 \text{und } \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq z \leq 1 + \gamma \mu_\nu} \left| g_{2,\nu}^{(l)}(z) \right| \cdot \epsilon^\nu &= 0
 \end{aligned}$$

für alle $l \in \mathbb{N}_0$, sowie

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} s_j(\nu) \cdot \epsilon^\nu = 0$$

für $1 \leq j \leq k$.

Beweis. $g_1^{(l)}(z)$ ist unabhängig von ν für alle $l \in \mathbb{N}_0$. Die Aussage für $g_1^{(l)}$ ergibt sich somit bereits aus der Feststellung, dass $g_1^{(l)}$ stetig und somit in einer Umgebung von 1 beschränkt ist. $g_2^{(l)}(z)$ hängt jedoch über s und k_0 von ν ab. Jedes $g_{2,\nu}^{(l)}(z)$ ist eine Linearkombination der Funktionen $C_{t,r}(z)$, $(1 - z)$, $G(z)$, $(1 - c_o z^o)^{-1}$, z^{k_0} und z^{os} und deren Ableitungen.

Die ersten vier Teilfunktionen und ihre Ableitungen sind unabhängig von ν und somit aufgrund ihrer Stetigkeit in einer hinreichend kleinen Umgebung von 1 beschränkt. Aufgrund der Annahme $n \in p\mathbb{N}$ gilt $k_0 = 0s$, sodass es genügt, einen der zwei verbleibenden Terme z^{k_0} und z^{0s} zu betrachten. Da k_0 gegen ∞ strebt, wenn $\nu \rightarrow \infty$, kann man ohne Einschränkung annehmen, dass $k_0 > k$. Es ergibt sich also

$$\frac{d^l}{dz^l} (z^{k_0}) = z^{k_0-l} \cdot \prod_{j=0}^{l-1} (k_0 - j),$$

und folglich erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq z \leq 1+\gamma\mu_\nu} \left| \frac{d^l}{dz^l} (z^{k_0}) (z) \right| &\leq k_0^l \cdot (1 + \gamma\mu_\nu)^{k_0} \\ &\leq (\nu p \lambda^{-1} \sup \varphi)^l \cdot (1 + \gamma\mu_w c_0^{\nu-1})^{\nu p \lambda^{-1} \sup \varphi}. \end{aligned}$$

Man betrachte wiederum die Teilterme. $(\nu p \lambda^{-1} \sup \varphi)^l$ ist ein polynomialer Ausdruck in ν und $(1 + \gamma\mu_w c_0^{\nu-1})^{\nu p \lambda^{-1} \sup \varphi}$ ist auf $[0, \infty)$ eine beschränkte Funktion von ν , denn

$$\begin{aligned} (1 + \gamma\mu_w c_0^{\nu-1})^{\nu p \lambda^{-1} \sup \varphi} &= e^{\log(1+\gamma\mu_w c_0^{\nu-1}) \cdot \nu p \lambda^{-1} \sup \varphi} \\ &\leq e^{\gamma\mu_w c_0^{\nu-1} \cdot \nu p \lambda^{-1} \sup \varphi} \end{aligned}$$

und dies strebt gegen 1 für $\nu \rightarrow \infty$. Die Behauptung für $g_{2,\nu}^{(l)}$ ergibt sich also aus der Tatsache, dass $\epsilon^\nu \cdot P(\nu) \rightarrow 0$ für jedes Polynom P in ν . Die Aussage für die s_j folgt nun daraus, dass sie sich als Summe von Produkten der bereits behandelten Terme schreiben lassen. \square

Bemerkung 7.13. Aus [Lemma 7.12](#) folgt insbesondere

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} s_j(\nu) \cdot \mu_\nu = 0.$$

Lemma 7.14. *Es sei $\gamma > 0$. Dann gibt es ein $K > 0$ und ein $\nu_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $\nu \geq \nu_0$ gilt*

$$0 < K \leq \inf_{1 \leq z \leq 1+\gamma\mu_\nu} |f'_\nu(z)|.$$

Beweis. Es ist

$$f'_\nu(z) = g'_1(z) + \mu_\nu \cdot g'_{2,\nu}(z).$$

Da $\mu_\nu = \mu_w c_0^{\nu-1}$ und $c_0 < 1$, folgt aus [Lemma 7.12](#), dass

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mu_\nu \cdot \sup_{1 \leq z \leq 1+\gamma\mu_\nu} |g'_{2,\nu}(z)| = 0.$$

Es genügt also zu zeigen, dass $\inf_{1 \leq z \leq 1 + \gamma \mu_\nu} |g'_1(z)| > 0$ für hinreichend große ν . Dies ist der Fall, denn

$$\begin{aligned} g'_1(z) &= \frac{d}{dz} \left((1-z) \cdot G(z) \cdot \frac{1}{1-c_0 z^0} \right) (z) \\ &= -G(z) \cdot \frac{1}{1-c_0 z^0} + (1-z) \cdot \underbrace{\frac{d}{dz} \left(G(z) \cdot \frac{1}{1-c_0 z^0} \right)}_{=:(\star)}. \end{aligned}$$

Hierbei ist der erste Summand für hinreichend große ν (und damit hinreichend nah bei 1 liegende z) von Null weg beschränkt, da $G(1) \neq 0$, und der zweite Summand geht für $\nu \rightarrow \infty$ gegen Null, da der Term (\star) als stetige Funktion in einer Umgebung um 1 beschränkt ist und $|1-z| \leq \gamma \mu_\nu$ gegen Null strebt. Die Existenz der von ν unabhängigen Konstante K ergibt sich daraus, dass g'_1 nicht von ν abhängt. \square

Mit diesen Informationen lässt sich nun eine Aussage darüber treffen, wie gut $z_\nu = e^{\rho(A_\nu, \lambda^{-1} \varphi)}$ durch $1 + s_1 \mu_\nu + s_2 \mu_\nu^2 + \dots + s_k \mu_\nu^k$ approximiert wird.

Annahme 7.15. *Es sei Annahme 1.15 erfüllt. Es sei $x \in X$ ein periodischer Punkt von Primperiode p , der durch Wiederholungen eines endlichen, reduzierten Wortes $w = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ gegeben ist und für den die lokale Ausströmrate $\rho(x, \mathbb{1})$ bezüglich der Basis existiert. Für $\nu \in \mathbb{N}$ sei durch $A_\nu := [x_1, \dots, x_{\nu p}]$ eine absteigende Folge von Löchern gegeben, deren Maße mit $\mu_\nu := \mu(A_\nu)$ bezeichnet werden.*

Theorem 7.16. *Es sei Annahme 7.15 erfüllt, die Dachfunktion φ sei λ -arithmetisch, es sei $k \in \mathbb{N}$, und es sei $s_i(\nu)$ für $i = 1, \dots, k$ wie in Fakt 7.10. Dann gilt für $z_{\nu, \lambda^{-1} \varphi} := e^{\rho(A_\nu, \lambda^{-1} \varphi)}$, dass*

$$\left| z_{\nu, \lambda^{-1} \varphi} - \left(1 + s_1 \mu_\nu + s_2 \mu_\nu^2 + \dots + s_k \mu_\nu^k \right) \right| = o(\mu_\nu^k).$$

Beweis. Zuerst beobachtet man, dass, da $s_1 > 0$ konstant ist,⁵⁴ aus Lemma 7.12 folgt, dass es ein $\gamma > 0$ gibt, sodass

$$1 \leq 1 + s_1 \mu_\nu + s_2 \mu_\nu^2 + \dots + s_k \mu_\nu^k \leq 1 + \gamma \mu_\nu$$

für hinreichend große ν . γ kann hierbei so groß gewählt werden, dass es auch für Lemma 7.9 tauglich ist, also $1 \leq z_\nu < 1 + \gamma \mu_\nu$ für hinreichend

⁵⁴ Siehe Gleichung (42).

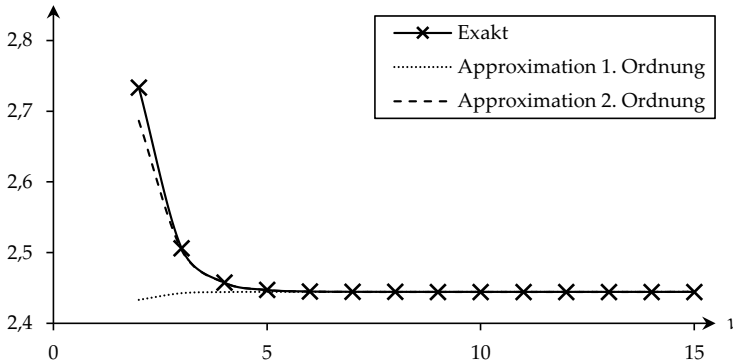


Abbildung 12: Verhalten von $\rho(A_\nu, \varphi) / \mu_\nu$ und der ersten zwei Approximationen aus [Beispiel 7.17](#)

große ν erfüllt. Folglich kann man abschätzen, wie weit man die Nullstelle verfehlt hat, indem man auf die Funktionswerte und die Ableitung von f_ν zurückgreift:

$$\begin{aligned} & \left| z_\nu - \left(1 + s_1 \mu_\nu + s_2 \mu_\nu^2 + \dots + s_k \mu_\nu^k \right) \right| \\ & \leq \frac{\left| f_\nu(z_\nu) - f_\nu \left(1 + s_1 \mu_\nu + s_2 \mu_\nu^2 + \dots + s_k \mu_\nu^k \right) \right|}{\inf_{1 \leq z \leq 1 + \gamma \mu_\nu} |f'_\nu(z)|}. \end{aligned}$$

Da $f_\nu(z_\nu) = 0$ und $f_\nu \left(1 + s_1 \mu_\nu + s_2 \mu_\nu^2 + \dots + s_k \mu_\nu^k \right)$ sich gemäß der Definition der s_j als jene Ausdrücke, die die Koeffizienten vor den $\mu_\nu, \dots, \mu_\nu^k$ in [Gleichung \(41\)](#) auf Seite [97](#) verschwinden lassen, als ein Ausdruck der Form

$$\mu_\nu^{k+1} \cdot \left(\text{Polynomialer Ausdruck in } \mu_\nu, \text{ den } s_j, \text{ den } g_1^{(l)} \text{ und } g_2^{(l)} \right)$$

darstellen lässt, folgt unter Verwendung von [Lemma 7.12](#) und [Lemma 7.14](#), dass $\left| z_\nu - \left(1 + s_1 \mu_\nu + s_2 \mu_\nu^2 + \dots + s_k \mu_\nu^k \right) \right| = o(\mu_\nu^k)$. \square

Beispiel 7.17. Das [Beispiel 7.2](#) werde aufgegriffen. In [Abbildung 12](#) sind die Werte von $\rho(A_\nu, \varphi) / \mu_\nu$ in Abhängigkeit von ν dargestellt, sowie die sich aus [Theorem 7.16](#) ergebenden Approximationen

$$\frac{\frac{1}{\lambda} \cdot \log(1 + s_1 \mu_\nu)}{\mu_\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{1}{\lambda} \cdot \log(1 + s_1 \mu_\nu + s_2 \mu_\nu^2)}{\mu_\nu}.$$

7.2 DIE LÖSUNG DES UMKEHRPROBLEMS

Die approximative Beschreibung der die Ausströmrates bestimmenden Nullstelle aus [Theorem 7.16](#) ist ein mächtiges Werkzeug. Nicht nur ist es möglich, eine leicht auszuwertende explizite Formel für die lokale Ausströmrates in periodischen Punkten zu erhalten, sondern auch die Lösung des Umkehrproblems für Halbströmungen über Markovshifts lässt sich aus ihr ableiten.

Satz 7.18. *Es sei [Annahme 7.15](#) erfüllt und die Dachfunktion φ sei stetig. Dann gilt*

$$\rho(x, \varphi) = \frac{1 - c_0}{\mu(\varphi)},$$

wobei $c_0 = p_{a_1, a_2} \cdots p_{a_{p-1}, a_p} \cdot p_{a_p, a_1}$.

Für die lokale Ausströmrates bezüglich der Basis, was hier dem Fall $\varphi = \mathbb{1}$ entspricht, sind entsprechende Ergebnisse zu Transformationen unterschiedlicher Gestalt bereits in [[KL2009](#), [FP2012](#), [CKDE2013](#)] zu finden.

Beweis. Gemäß [Zusammenfassung 7.8](#) gilt

$$\rho(A_v, \mathbb{1}) = \log z_{v, \mathbb{1}},$$

wobei $z_{v, \mathbb{1}} \in \mathbb{R}_{>0}$ die betragsmäßig kleinste Nullstelle von $f_{v, \mathbb{1}}$ zur Halbströmung unter $\mathbb{1}$ über der Basistransformation θ bezüglich des Lochs A_v ist. Aus [Theorem 7.16](#) und [Gleichung \(42\)](#) folgt, dass

$$z_{v, \mathbb{1}} = 1 + (1 - c_0) \mu(A_v) + o(\mu(A_v)).$$

Da $\log(1 + x) = x + o(x)$ für $x \rightarrow 0$, ergibt sich für die Ausströmrates

$$\rho(A_v, \mathbb{1}) = (1 - c_0) \mu(A_v) + o(\mu(A_v)),$$

was bedeutet, dass die lokale Ausströmrates bezüglich der Dachfunktion $\mathbb{1}$ durch

$$\rho(x, \mathbb{1}) = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\rho(A_v, \mathbb{1})}{\mu(A_v)} = (1 - c_0)$$

gegeben ist⁵⁵ und somit unter Verwendung von [Korollar 6.8](#)

$$\rho(x, \varphi) = \frac{(1 - c_0)}{\mu(\varphi)}$$

für die lokale Ausströmrates folgt. □

⁵⁵ An dieser Stelle wird nur der Grenzwert einer Teilfolge der gemäß [Definition 6.2](#) zu betrachtenden Folge ermittelt. Da jedoch vorausgesetzt wurde, dass die lokale Ausströmrates $\rho(x, \mathbb{1})$ existiert, reicht dies aus.

Bemerkung 7.19. Anstelle [Korollar 6.8](#) zu verwenden, ließe sich auch direkt mit dem in [Gleichung \(42\)](#) für λ -arithmetisches φ ermittelten Faktor $1/\mu(\lambda^{-1}\varphi)$, einer Approximation stetiger Funktionen durch arithmetische Zylinderfunktionen und der Monotonieeigenschaft der Ausströmraten argumentieren.

Die numerischen Ergebnisse aus [Beispiel 7.2](#) zu Beginn der Diskussion des Umkehrproblems legen bereits nahe, dass die Abweichungen der Folge $\rho(A_\nu, \varphi) / \mu(A_\nu)$ von der lokalen Ausströmraten $\rho(x, \varphi)$ in Zusammenhang mit den Funktionswerten der Punkte aus der Bahn von x stehen. Diese Beziehung wird nun konkretisiert.

Theorem 7.20. *Es sei [Annahme 7.15](#) erfüllt und die Dachfunktion φ sei eine Zylinderfunktion. Dann gilt*

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\frac{\rho(A_\nu, \varphi)}{\mu(A_\nu)} - \rho(x, \varphi)}{\frac{\rho(A_\nu, \mathbb{1})}{\mu(A_\nu)} - \rho(x, \mathbb{1})} = \frac{1}{\mu(\varphi)^2} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{p-1} \varphi \circ \theta^i(x)}{p}. \tag{43}$$

Aus der Kenntnis der Ausströmraten und Maße bezüglich der Basis, sowie des Integrals der Dachfunktion lässt sich also die zu einem periodischen Punkt x gehörige Bahnlänge ermitteln.

Beweis. Zuerst wird die Aussage für λ -arithmetische φ gezeigt. Hierzu kann man – wie bereits im Beweis zu [Satz 7.18](#) – ausnutzen, dass $\rho(A_\nu, \varphi) = \lambda^{-1} \rho(A_\nu, \lambda^{-1}\varphi) = \lambda^{-1} \log z_{\nu, \lambda^{-1}\varphi}$, sodass

$$z_{\nu, \lambda^{-1}\varphi} = 1 + s_{1, \lambda^{-1}\varphi} \mu(A_\nu) + s_{2, \lambda^{-1}\varphi} \mu(A_\nu)^2 + o(\mu(A_\nu)^2)$$

mit $s_{1, \lambda^{-1}\varphi}$ und $s_{2, \lambda^{-1}\varphi}$ wie in [Gleichung \(42\)](#). Mittels der Taylordarstellung des Logarithmus

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} &\rho(A_\nu, \lambda^{-1}\varphi) \\ &= s_{1, \lambda^{-1}\varphi} \mu(A_\nu) + \left(s_{2, \lambda^{-1}\varphi} - \frac{1}{2} s_{1, \lambda^{-1}\varphi}^2 \right) \mu(A_\nu)^2 + o(\mu(A_\nu)^2). \end{aligned}$$

In analoger Weise erhält man solche Formeln für $z_{\nu, \mathbb{1}}$ sowie $s_{1, \mathbb{1}}$ und $s_{2, \mathbb{1}}$.

Nun nutzt man aus, dass die s_1 -Terme konstant sind und s_2 nur über $k_0(\nu, \bullet) = (\nu - n/p) \cdot \lambda^{-1} \cdot S_p \bullet(x)$ (siehe [Gleichung \(34\)](#)) von ν abhängt und erhält

$$\begin{aligned}
& \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\frac{\rho(A_v, \varphi)}{\mu(A_v)} - \rho(x, \varphi)}{\frac{\rho(A_v, \mathbb{1})}{\mu(A_v)} - \rho(x, \mathbb{1})} \\
&= \lim_{v \rightarrow \infty} \lambda^{-1} \cdot \frac{\frac{\rho(A_v, \lambda^{-1} \varphi)}{\mu(A_v)} - \rho(x, \lambda^{-1} \varphi)}{\frac{\rho(A_v, \mathbb{1})}{\mu(A_v)} - \rho(x, \mathbb{1})} \\
&= \lim_{v \rightarrow \infty} \lambda^{-1} \frac{s_{1, \lambda^{-1} \varphi} + \left(s_{2, \lambda^{-1} \varphi} - \frac{1}{2} s_{1, \lambda^{-1} \varphi}^2 \right) \mu(A_v) + o(\mu(A_v)) - s_{1, \lambda^{-1} \varphi}}{s_{1, \mathbb{1}} + \left(s_{2, \mathbb{1}} - \frac{1}{2} s_{1, \mathbb{1}}^2 \right) \mu(A_v) + o(\mu(A_v)) - s_{1, \mathbb{1}}} \\
&= \lim_{v \rightarrow \infty} \lambda^{-1} \frac{s_{2, \lambda^{-1} \varphi} - \frac{1}{2} s_{1, \lambda^{-1} \varphi}^2 + o(1)}{s_{2, \mathbb{1}} - \frac{1}{2} s_{1, \mathbb{1}}^2 + o(1)} \\
&= \lim_{v \rightarrow \infty} \lambda^{-1} \frac{\frac{(1-c_0)^2}{\mu(\lambda^{-1} \varphi)^2} \cdot k_0(v, \varphi) + O(1)}{(1-c_0)^2 k_0(v, \mathbb{1}) + O(1)} \\
&= \lim_{v \rightarrow \infty} \lambda^{-1} \frac{\frac{1}{\mu(\lambda^{-1} \varphi)^2} \cdot \lambda^{-1} \cdot S_p \varphi(x) \cdot v + O(1)}{S_p \mathbb{1}(x) \cdot v + O(1)} \\
&= \frac{1}{\mu(\varphi)^2} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{p-1} \varphi \circ \theta^i(x)}{p}.
\end{aligned}$$

Um die Aussage auf allgemeine Zylinderfunktionen $\varphi > 0$ auszudehnen, wird zuerst beobachtet, dass man den zu untersuchenden Term wie folgt umformulieren kann:

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{\rho(A_v, \varphi)}{\mu(A_v)} - \rho(x, \varphi)}{\frac{\rho(A_v, \mathbb{1})}{\mu(A_v)} - \rho(x, \mathbb{1})} \\
&= \frac{\rho^{-1}(A_v, \varphi) \cdot \mu(A_v) - \rho^{-1}(x, \varphi)}{\frac{\rho(A_v, \mathbb{1})}{\mu(A_v)} - \rho(x, \mathbb{1})} \cdot (-1) \cdot \frac{\rho(A_v, \varphi)}{\mu(A_v)} \cdot \rho(x, \varphi).
\end{aligned}$$

Man weiß, dass die Folge der Faktoren

$$(-1) \cdot \frac{\rho(A_v, \varphi)}{\mu(A_v)} \cdot \rho(x, \varphi)$$

für $v \rightarrow \infty$ gegen die (in Abhängigkeit von φ) stetige Funktion $-\rho(x, \varphi)^2$ konvergiert. Über die Folge der Faktoren

$$\frac{\rho^{-1}(A_v, \varphi) \cdot \mu(A_v) - \rho^{-1}(x, \varphi)}{\frac{\rho(A_v, \mathbb{1})}{\mu(A_v)} - \rho(x, \mathbb{1})} \quad (44)$$

ist bekannt, dass sie für arithmetische Zylinderfunktionen $\varphi > 0$ für $\nu \rightarrow \infty$ konvergiert, da sie sich von der eingangs betrachteten Folge nur um die Multiplikation mit einer konvergenten Folge unterscheidet. Der Ausdruck (44) ist zudem für jedes ν eine konvexe Funktion in φ , da der Nenner und $\mu(A_\nu)$ unabhängig von φ sind und $\rho^{-1}(A_\nu, \cdot)$ konvex und $\rho^{-1}(x, \cdot)$ linear ist. Die Annahme, dass φ eine Zylinderfunktion ist, bedeutet, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\varphi \in Z_n$. Da die arithmetischen Zylinderfunktionen dicht im endlichdimensionalen Vektorraum Z_n liegen, kann der folgende Satz aus der Theorie konvexer Funktionen verwendet werden.

Satz 7.21 ([Roc1972, Theorem 10.8]). *Es sei C eine offene Teilmenge eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums, und es sei f_1, f_2, \dots eine Folge endlicher, konvexer Funktionen auf C . Man nehme an, dass die Folge auf einer dichten Teilmenge $C' \subset C$ punktweise konvergiert und die Grenzwerte jeweils endlich sind. Dann konvergiert die Folge für jedes $c \in C$ und die Grenzfunktion f , die durch*

$$f(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(c)$$

gegeben ist, endlich und konvex auf C . Ferner konvergiert die Folge f_1, f_2, \dots auf jeder abgeschlossenen, beschränkten Teilmenge von C gleichmäßig gegen f .

Zur Anwendung des Satzes auf die vorliegende Situation kann als offene Menge C die offene Kugel $B_\varepsilon(\varphi)$ um φ in Z_n bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm dienen, wobei der Radius ε kleiner als $\inf \varphi$ gewählt werden muss. Als Funktionenfolge hat man $\rho^{-1}(A_\nu, \cdot) \cdot \mu(A_\nu) - \rho^{-1}(x, \cdot)$ mit $\nu = 1, 2, \dots$. Die dichte Teilmenge C' , auf der die Folge konvergiert, ist durch die in C enthaltenen arithmetischen Zylinderfunktionen gegeben. Der Satz liefert nun die Existenz eines endlichen Grenzwerts für alle $\varphi \in B_\varepsilon(\varphi)$. Da die Konvergenz lokal gleichmäßig ist, ist die Grenzfunktion stetig auf $B_\varepsilon(\varphi)$. Da man $\{\varphi \in Z_n \mid \varphi > 0\}$ durch derartige Umgebungen überdecken kann, folgt die Stetigkeit der Grenzfunktion für alle Dachfunktionen aus Z_n . Insgesamt erhält man somit, dass Gleichung (43) nicht nur für arithmetische Zylinderfunktionen, sondern für allgemeine Zylinderfunktionen als Dachfunktion gilt. \square

Bemerkung 7.22. Satz 7.21 kann nicht genutzt werden, um Theorem 7.20 auf stetige Dachfunktionen auszudehnen, da er nur für Teilmengen endlichdimensionaler Vektorräume gilt. Tatsächlich kann man leicht einsehen, dass die Konvergenz in Gleichung (43) nicht lokal gleichmäßig auf dem Raum der stetigen Funktionen (ausgestattet mit der Supremumsnorm) sein kann. Man betrachte dazu eine ε -Umgebung um die Funktion φ mit $0 < \varepsilon < \inf \varphi$. Für jedes ν kann man eine Funktion $\psi_\nu \in B_\varepsilon(\varphi)$

finden, die $\mu(\psi_\nu) = \mu(\varphi)$ und $\rho(A_\nu, \psi_\nu) = \rho(A_\nu, \varphi - \varepsilon/2 \cdot \mathbb{1})$ erfüllt, da aus [Satz 2.6](#) folgt, dass man die Funktion $\varphi - \varepsilon/2 \cdot \mathbb{1}$ auf der Vereinigung endlich vieler Urbilder von A_ν (also auf einer Menge beliebig nah an 1 liegenden Maßes) abändern kann, ohne die Ausströmrate bezüglich A_ν zu verändern. Da der Nenner des Quotienten in [Gleichung \(43\)](#) gegen Null, der Zähler für derartige ψ_ν jedoch gegen den positiven Wert

$$\rho\left(x, \varphi - \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbb{1}\right) - \rho(x, \varphi) = \left(\frac{1}{\mu(\varphi - \frac{\varepsilon}{2} \cdot \mathbb{1})} - \frac{1}{\mu(\varphi)}\right) \cdot \rho(x, \mathbb{1})$$

strebt, konvergiert der Quotient auf der durch die ψ_ν bestimmten Diagonalfolge nicht gegen einen endlichen Wert. Die Konvergenz kann also nicht lokal gleichmäßig sein, da andernfalls die Grenzfunktion auf dieser Umgebung existieren und lokal stetig sein würde, und somit endlich sein müsste, da bereits bekannt ist, dass die Werte auf einer dichten Teilmenge endlich sind. Die Tatsache, dass keine lokal gleichmäßige Konvergenz vorliegt, impliziert jedoch nicht, dass das Ergebnis aus [Theorem 7.20](#) für stetige Dachfunktionen, die keine Zylinderfunktionen sind, falsch ist. Es folgt nur, dass ein naiver Approximationsansatz für die Ausdehnung des Ergebnisses auf stetige Funktionen nicht ausreicht. Man beachte in diesem Zusammenhang auch, dass sich nach [Satz 2.13 \(c\)](#) die Ausströmrate nicht ändert, wenn man die Dachfunktion um einen Korand abändert. Dies bedeutet, dass [Theorem 7.20](#) auch für all jene Dachfunktionen gilt, die sich nur durch Addition eines Korandes von einer Zylinderfunktion unterscheiden, selbst jedoch nicht notwendigerweise Zylinderfunktionen sind.

[Theorem 7.20](#) kann in eine Gestalt gebracht werden, die die Verhltniseigenschaft der Aussage noch deutlicher hervortreten lässt.

Korollar 7.23. *Es sei [Annahme 7.15](#) erfüllt, und es seien zwei Zylinderfunktion φ und ψ als Dachfunktionen gegeben. Dann gilt*

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\frac{\rho(A_\nu, \varphi)}{\mu(A_\nu)} - \rho(x, \varphi)}{\frac{\rho(A_\nu, \psi)}{\mu(A_\nu)} - \rho(x, \psi)} = \frac{\mu(\psi)^2}{\mu(\varphi)^2} \cdot \frac{S_p \varphi(x)}{S_p \psi(x)}.$$

MATRIZEN

A.1 OPERATORNORM UND SPEKTRALRADIUS

Definition A.1. Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum über dem Körper \mathbb{K} mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, und es sei $\mathfrak{L}(X) := \{T : X \rightarrow X \mid T \text{ ist linear und stetig}\}$. Die Menge

$$\sigma(T) := \left\{ \lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda \cdot \text{Id} - T)^{-1} \text{ existiert nicht in } \mathfrak{L}(X) \right\}$$

heißt **SPEKTRUM** von T . Durch

Spektrum

$$\|T\| := \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

wird eine Norm auf $\mathfrak{L}(X)$ definiert, die **OPERATORNORM** genannt wird. Die Größe

Operatornorm

$$r(T) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

heißt **SPEKTRALRADIUS** von $T \in \mathfrak{L}(X)$.

Spektralradius

Satz A.2 ([Wer2007, Satz VI.1.6]). *Es gilt:*

- A. $|\lambda| \leq r(T) \leq \|T\|$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$.
- B. Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dann existiert ein $\lambda \in \sigma(T)$, sodass $r(T) = |\lambda|$.

Im endlichdimensionalen Fall kann der Spektralradius als Maximum der Beträge der (möglicherweise komplexen) Eigenwerte aufgefasst werden. Man beachte, dass der Spektralradius im endlichdimensionalen Fall somit nicht von der Wahl der Norm abhängt.

Für den Fall $X = \mathbb{R}^n$ sind zwei Normen in dieser Arbeit von besonderer Bedeutung. Zum einen die **1-NORM**

1-Norm

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

und zum anderen die **MAXIMUMSNORM**

Maximumsnorm

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

für $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X$. Eine Besonderheit der Maximumsnorm ist, dass sich die von ihr abgeleitete Operatornorm auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ leicht explizit angeben lässt, wenn man die lineare Abbildung mit der sie darstellenden Matrix identifiziert: $\|T\|_\infty$ ist das Maximum der Betragssummen der Zeilen, weswegen diese Operatornorm auch *Zeilensummennorm* heißt.

A.2 NICHTNEGATIVE MATRIZEN

Matrizen M werden im Allgemeinen mit Großbuchstaben bezeichnet und ihre Elemente mit Hilfe des zugehörigen kleinen Buchstabens als $m_{i,j}$ beschrieben. Mit id wird die Einheitsmatrix bezeichnet, wobei die Dimension der Matrix immer durch den Kontext bestimmt ist und daher in der Notation nicht explizit erwähnt wird. Falls eine Matrix nicht mit einem Großbuchstaben bezeichnet ist, beispielsweise weil sie nur als Verkettung anderer Matrizen gegeben ist, so werden die Elemente als $(\text{Matrixterm})_{i,j}$ beschrieben. Diese Notation ist nicht zu verwechseln mit der Schreibweise $[M]_{i,j}$, welche jene **UNTERMATRIX** von M bezeichnet, die aus M durch das Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte entsteht. Als **HAUPTUNTERMATRIX** einer $n \times n$ -Matrix M bezeichnet man eine Matrix der Form $[M]_A$ mit $A \subset \{1, \dots, n\}$, die aus M durch das Streichen aller Zeilen und Spalten mit Indizes in A entsteht.

Untermatrix

Hauptuntermatrix

irreduzibel

Definition A.3. Eine Matrix $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ heißt **IRREDUZIBEL**, wenn für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $(M^n)_{i,j} > 0$.

Satz A.4 ([Gan1986, 13.3 Satz 3 und 13.2 Satz 2]). *Es sei $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ eine nichtnegative Matrix, und es sei $\lambda := r(M)$. Dann gilt:*

- A. $\lambda \in \sigma(M)$.
- B. *Es gibt ein $\vec{v} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$, sodass $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$.*

Wenn A außerdem irreduzibel ist, sind λ und \vec{v} positiv und zudem λ ein einfacher Eigenwert von M .

Bemerkung A.5. **Satz A.4** ist (für den Fall irreduzibler nichtnegativer Matrizen) als **Satz von Perron-Frobenius** bekannt.

Satz A.6 (Gantmacher [Gan1986, 13.3.2.4]). *Es sei $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ eine nichtnegative, irreduzible Matrix, und es sei $M' \neq M$ eine Hauptuntermatrix von M . Dann gilt*

$$\sigma(M') < \sigma(M).$$

Satz A.7. Es sei $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ eine nichtnegative Matrix, und es sei $\lambda := r(M)$. Dann gilt für jeden Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}_{> 0}^n$ mit ausschließlich positiven Einträgen, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|M^m \cdot \vec{w}\|_1} = \lambda.$$

Beweis. Es sei $\vec{v} \in \mathbb{R}_{> 0}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ . Man kann \vec{v} so wählen, dass $\vec{w} - \vec{v} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$. Es ist

$$\begin{aligned} \|M^m \cdot \vec{w}\|_1 &= \|M^m \cdot (\vec{v} + (\vec{w} - \vec{v}))\|_1 \\ &= \lambda^m \|\vec{v}\|_1 + \|M^m \cdot (\vec{w} - \vec{v})\|_1, \end{aligned}$$

woraus man die Abschätzung

$$\lambda \cdot \sqrt[m]{\|\vec{v}\|_1} \leq \sqrt[m]{\|M^m \cdot \vec{w}\|_1} \leq \sqrt[m]{\|M^m\|_1} \cdot \sqrt[m]{\|\vec{w}\|_1}$$

erhält. Für $m \rightarrow \infty$ konvergieren sowohl obere als auch untere Abschätzung gegen den Spektralradius λ . □

Satz A.8. Es sei $M \in \mathbb{R}_{> 0}^{n \times n}$, und es sei $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix, deren Einträge auf der Diagonalen jeweils den Betrag 1 haben. Dann gilt

$$r(DM) \leq r(M).$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\|(DM)^k\|_\infty \leq \|M^k\|_\infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Um dies zu erreichen, genügt es wiederum, zu beweisen, dass $(DM)^k$ komponentenweise betragsmäßig kleiner oder gleich M^k ist. Dies geschieht per Induktion. Offenkundig ist es wahr für $k = 1$. Wenn es für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt, dann auch für $k + 1$, denn

$$\begin{aligned} \left| \left((DM)^{k+1} \right)_{i,j} \right| &= \left| \left(M (DM)^k \right)_{i,j} \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n m_{i,k} \left((DM)^k \right)_{k,j} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |m_{i,k}| \cdot \left| \left(M^k \right)_{k,j} \right| \\ &= \left(M^{k+1} \right)_{i,j}. \end{aligned}$$

□

Satz A.9. Es sei $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ eine irreduzible, zeilenstochastische⁵⁶ Matrix. Dann gilt $1 = r(M) \in \sigma(\bar{M})$, und es gibt einen eindeutig bestimmten, positiven reellen Linkseigenvektor \vec{v} zum Eigenwert 1 mit $\|\vec{v}\|_1 = 1$.

⁵⁶ Zeilenstochastisch bedeutet, dass alle Elemente der Matrix nichtnegativ sind und alle Zeilensummen Eins ergeben.

Beweis. Da M zeilenstochastisch ist, gilt $\|M\|_\infty = 1$ und somit $r(M) \leq 1$. Da $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ ein Rechtseigenvektor zum Eigenwert 1 ist, folgt $r(M) = 1$. Auch für die transponierte Matrix gilt $r(M^\top) = 1$. Nach [Satz A.4](#) ist 1 ein einfacher Eigenwert von M^\top , und es gibt einen bis auf einen skalaren Faktor bestimmten, positiven Rechtseigenvektor \vec{v} mit $M^\top \vec{v} = \vec{v}$, der folglich ein Linkseigenvektor für M ist. Die Bedingung $\|\vec{v}\|_1 = 1$ stellt die Eindeutigkeit von \vec{v} sicher. \square

Satz A.10. *Es sei $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ eine irreduzible, zeilenstochastische Matrix. Es sei $\emptyset \neq A \subset \{1, \dots, n\}$, und es sei M_A die Matrix, die man aus M durch das Nullsetzen aller Zeilen mit Indizes in A erhält. Dann gilt*

$$r(M_A) = r([M]_A) < 1.$$

Beweis. Gemäß [Satz A.9](#) gilt $r(M) = 1$ und nach Gantmacher [[Gan1986](#), 13.3 Satz 6'] zudem $r([M]_A) < r(M)$. Da in M_A die Zeilen mit Indizes in A Null gesetzt wurden, lässt sich zum einen folgern, dass sich jeder Rechtseigenvektor von $[M]_A$ durch passendes Auffüllen mit Nullen zu einem Rechtseigenvektor von M_A ergänzen lässt, was $r(M_A) \geq r([M]_A)$ impliziert. Zum anderen kann man schließen, dass jeder Rechtseigenvektor \vec{v} von M_A die Bedingung $v_i = 0$ für $i \in A$ erfüllt und somit durch Streichen der entsprechenden Einträge einen Rechtseigenvektor von $[M]_A$ gibt, was die umgekehrte Ungleichung $r(M_A) \leq r([M]_A)$ impliziert. Folglich gilt $r(M_A) = r([M]_A)$. \square

Satz A.11. *Es sei $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n \times n}$ eine irreduzible, zeilenstochastische Matrix, und es sei $C_{t,r}(z) := (-1)^{t+r} \det[\text{id} - z \cdot M]_{t,r}$ für $t, r \in \{0, 1, \dots, n\}$. $C_{t,r}(z)$ heißt Kofaktor der Matrix $\text{id} - z \cdot M$ an der Stelle (t, r) . Da $1 \in \sigma(A)$ gemäß [Satz A.9](#), kann man $\det(\text{id} - z \cdot M) = (1 - z) \cdot G(z)$ mit einem Polynom $G(z)$ schreiben. Es bezeichne $\vec{v} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ den eindeutig bestimmten Linkseigenvektor von M zum Eigenwert 1 mit $\|\vec{v}\|_1 = 1$. Mit diesen Bezeichnungen gilt*

$$C_{t,r}(1) = v_t \cdot G(1).$$

Beweis. Zuerst wird gezeigt, dass für alle $r = 1, \dots, n$ gilt, dass

$$C_{t,r}(1) = C_{t,t}(1).$$

Zu diesem Zweck beobachtet man zunächst, dass durch Entwickeln der Determinante nach der t -ten Zeile

$$\det(\text{id} - z \cdot M) = C_{t,t}(z) - \sum_{r=1}^n z \cdot m_{t,r} C_{t,r}(z).$$

Da 1 ein Eigenwert von M ist, ergibt sich folglich für $z = 1$

$$0 = C_{t,t}(1) - \sum_{r=1}^n m_{t,r} C_{t,r}(1). \quad (45)$$

Nun kann man ausnutzen, dass M zeilenstochastisch ist und folgern, dass

$$0 = \sum_{r=1}^n m_{t,r} (C_{t,t}(1) - C_{t,r}(1)). \quad (46)$$

Man beachte, dass $C_{t,r}(z)$ unabhängig von den Einträgen der t -ten Zeile in M ist. Auch die Tatsache, dass 1 ein Eigenwert von M ist, hängt nicht von den speziellen Werten ab, sondern nur davon, dass die Matrix zeilenstochastisch ist. Man kann also die t -te Zeile von M durch eine beliebige andere Zeile $(m'_{t,1}, \dots, m'_{t,n})$ mit nichtnegativen Einträgen und Zeilensumme 1 ersetzen; insbesondere kann dies eine Zeile sein, bei der für ein einziges r gilt, dass $m'_{t,r} = 1$ und alle anderen Einträge Null sind. Durch ein derartiges Abändern von M kann man folgern, dass

$$C_{t,r}(1) = C_{t,t}(1) \quad (47)$$

für alle $r = 1, \dots, n$, womit die Zwischenbehauptung gezeigt ist.

Mit dieser Aussage und unter Zuhilfenahme des Analogons von [Gleichung \(45\)](#) für eine Entwicklung nach der r -ten Spalte anstelle der t -ten Zeile erhält man

$$\sum_{t=1}^n C_{t,t}(1) \cdot m_{t,r} = \sum_{t=1}^n C_{t,r}(1) \cdot m_{t,r} = C_{r,r}(1)$$

für $r = 1, \dots, n$, was bedeutet, dass $(C_{t,t}(1))_{t=1, \dots, n}$ ein Linkseigenvektor von M zum Eigenwert 1 und folglich ein skalares Vielfaches von \vec{v} ist. Nun führt die Beobachtung, dass sowohl

$$\frac{d}{dz} (\det(\text{id} - z \cdot M)) = \frac{d}{dz} ((1 - z) \cdot G(z)) = -G(z) + (1 - z) \cdot G'(z)$$

als auch

$$\frac{d}{dz} (\det(\text{id} - z \cdot M)) = \sum_{t=1}^n \sum_{r=1}^n -m_{t,r} \cdot C_{t,r}(z)$$

gilt,⁵⁷ für $z = 1$ zu

$$G(1) = \sum_{t=1}^n \sum_{r=1}^n m_{t,r} \cdot C_{t,r}(1) = \sum_{t=1}^n C_{t,t}(1),$$

⁵⁷ Dies benutzt die Jacobische Formel für die Ableitung der Determinante, siehe beispielsweise [MN1991, Kapitel 8.3, Theorem 1].

da M zeilenstochastisch ist und [Gleichung \(47\)](#) gilt. Man kann nun schließen, dass

$$G(1) \cdot \vec{v} = (C_{t,t}(1))_{t=1,\dots,n},$$

was zusammen mit [Gleichung \(47\)](#) die zu zeigende Aussage impliziert. \square

LITERATURVERZEICHNIS

- [AB1994] C. D. Aliprantis und K. C. Border: *Infinite Dimensional Analysis*. Berlin Heidelberg : Springer, 1994 (Studies in Economic Theory 4). – DOI [10.1007/978-3-662-03004-2](https://doi.org/10.1007/978-3-662-03004-2)
- [AE2006] H. Amann und J. Escher: *Analysis I*. Basel : Birkhäuser Verlag, 2006 (Grundstudium Mathematik). – DOI [10.1007/978-3-7643-7756-4](https://doi.org/10.1007/978-3-7643-7756-4)
- [Amb1941] W. Ambrose: *Representation of Ergodic Flows*. In: The Annals of Mathematics 42 (1941), Nr. 3, S. 723–739. – DOI [10.2307/1969259](https://doi.org/10.2307/1969259)
- [BFGM2014] C. Bose, G. Froyland, C. González-Tokman und R. Murray: *Ulam’s Method for Lasota–Yorke Maps with Holes*. In: SIAM Journal on Applied Dynamical Systems 13 (2014), Nr. 2, S. 1010–1032. – DOI [10.1137/130917533](https://doi.org/10.1137/130917533)
- [BJP2014] O. F. Bandtlow, O. Jenkinson und M. Pollicott: *Periodic Points, Escape Rates and Escape Measures*. In: W. Bahsoun (Hrsg.), C. Bose (Hrsg.) und G. Froyland (Hrsg.): *Ergodic Theory, Open Dynamics, and Coherent Structures* Bd. 70. New York : Springer, 2014 (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics), S. 41–58. – DOI [10.1007/978-1-4939-0419-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4939-0419-8)
- [BKR1962] L. E. Baum, M. Katz und R. R. Read: *Exponential convergence rates for the law of large numbers*. In: Transactions of the American Mathematical Society 102 (1962), Nr. 2, S. 187–199. – DOI [10.1090/s0002-9947-1962-0133855-x](https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1962-0133855-x)
- [Bla1976] F. Blanchard: *K-flots et théorème de renouvellement*. In: Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 36 (1976), Nr. 4, S. 345–358. – DOI [10.1007/bf00532699](https://doi.org/10.1007/bf00532699)
- [BY2011] L. A. Bunimovich und A. Yurchenko: *Where to place a hole to achieve a maximal escape rate*. In: Israel Journal of Mathematics 182 (2011), Nr. 1, S. 229–252. – DOI [10.1007/s11856-011-0030-8](https://doi.org/10.1007/s11856-011-0030-8)

- [CAM⁺2012] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner und G. Vattay: *Chaos: Classical and Quantum*. version 14. Copenhagen : Niels Bohr Institute, 2012. – ChaosBook.org
- [CFS1982] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin und J. G. Sinai: *Ergodic theory*. New York : Springer, 1982 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 245). – DOI [10.1007/978-1-4615-6927-5](https://doi.org/10.1007/978-1-4615-6927-5)
- [CKDE2013] G. Cristadoro, G. Knight und M. Degli Esposti: *Follow the fugitive: an application of the method of images to open systems*. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 46 (2013), Nr. 27, S. 272001. – DOI [10.1088/1751-8113/46/27/272001](https://doi.org/10.1088/1751-8113/46/27/272001)
- [CMS1997] P. Collet, S. Martínez und B. Schmitt: *The Pianigiani-Yorke measure for topological Markov chains*. In: *Israel Journal of Mathematics* 97 (1997), Nr. 1, 61-70. – DOI [10.1007/bf02774026](https://doi.org/10.1007/bf02774026)
- [Den2005] M. Denker: *Einführung in die Analysis dynamischer Systeme*. Berlin Heidelberg : Springer, 2005 (Springer-Lehrbuch). – DOI [10.1007/b137966](https://doi.org/10.1007/b137966)
- [Doo1953] J. L. Doob: *Stochastic Processes*. Wiley Classics Library Edition Published 1990. Wiley-Interscience, 1953
- [Flo1995] C. A. Floudas: *Nonlinear and Mixed-Integer Optimization: Fundamentals and Applications*. Oxford University Press, USA, 1995 (Topics in Chemical Engineering)
- [FP2012] A. Ferguson und M. Pollicott: *Escape rates for Gibbs measures*. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 32 (2012), Nr. 03, S. 961–988. – DOI [10.1017/s0143385711000058](https://doi.org/10.1017/s0143385711000058)
- [Gan1986] F. R. Gantmacher: *Matrizentheorie*. Berlin Heidelberg : Springer, 1986. – DOI [10.1007/978-3-642-71243-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-71243-2)
- [GKZ1994] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov und A. V. Zelevinsky: *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*. Boston : Birkhäuser, 1994. – DOI [10.1007/978-0-8176-4771-1](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4771-1)
- [Gur1965] B. M. Gurevich: *Construction of Increasing Partitions for Special Flows*. In: *Theory of Probability & Its Applications* 10 (1965), Nr. 4, 627-645. – DOI [10.1137/1110077](https://doi.org/10.1137/1110077)

- [Hop1937] E. Hopf: *Ergodentheorie*. Berlin Heidelberg : Springer, 1937 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 5). – DOI [10.1007/978-3-642-86630-2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-86630-2)
- [Jac1960] K. Jacobs: *Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie*. Berlin Heidelberg : Springer, 1960 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 29). – DOI [10.1007/978-3-642-94777-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-94777-3)
- [JKL2014] J. Jaerisch, M. Kesseböhmer und S. Lamei: *Induced topological pressure for countable state Markov shifts*. In: *Stochastics and Dynamics* 14 (2014), Nr. 02, 1350016. – DOI [10.1142/s0219493713500160](https://doi.org/10.1142/s0219493713500160)
- [Kac1996] A. G. Kachurovskii: *The rate of convergence in ergodic theorems*. In: *Russian Mathematical Surveys* 51 (1996), Nr. 4, S. 653–703. – DOI [10.1070/rm1996v051n04abeh002964](https://doi.org/10.1070/rm1996v051n04abeh002964)
- [KL2009] G. Keller und C. Liverani: *Rare Events, Escape Rates and Quasistationarity: Some Exact Formulae*. In: *Journal of Statistical Physics* 135 (2009), Nr. 3, S. 519–534. – DOI [10.1007/s10955-009-9747-8](https://doi.org/10.1007/s10955-009-9747-8)
- [Koc2002] A. V. Kochergin: *A mixing special flow over a circle rotation with almost Lipschitz function*. In: *Sbornik: Mathematics* 193 (2002), Nr. 3, 359–385. – DOI [10.1070/sm2002v193n03abeh000636](https://doi.org/10.1070/sm2002v193n03abeh000636)
- [Kre1968] U. Krengel: *Darstellungssätze für Strömungen und Halbströmungen I*. In: *Mathematische Annalen* 176 (1968), Nr. 3, S. 181–190. – DOI [10.1007/BF02052824](https://doi.org/10.1007/BF02052824)
- [KT1961] M. Katz und A. J. Thomasian: *A Bound for the Law of Large Numbers for Discrete Markov Processes*. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 32 (1961), Nr. 1, S. 336–337. – DOI [10.1214/aoms/1177705163](https://doi.org/10.1214/aoms/1177705163)
- [Lin1989] D. A. Lind: *Perturbations of Shifts of Finite Type*. In: *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 2 (1989), Nr. 3, S. 350–365. – DOI [10.1137/0402031](https://doi.org/10.1137/0402031)
- [LM1994] A. Lasota und M. C. Mackey: *Chaos, Fractals, and Noise*. Second Edition. New York : Springer, 1994 (Applied Mathematical Sciences 97). – DOI [10.1007/978-1-4612-4286-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4286-4)

- [LMD2003] C. Liverani und V. Maume-Deschamps: *Lasota–Yorke maps with holes: conditionally invariant probability measures and invariant probability measures on the survivor set*. In: Annales de l’Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics 39 (2003), Nr. 3, 385–412. – DOI [10.1016/S0246-0203\(02\)00005-5](https://doi.org/10.1016/S0246-0203(02)00005-5)
- [MN1991] J. R. Magnus und H. Neudecker: *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. Repr., (rev.). Chichester : John Wiley & Sons, 1991 (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics)
- [OR1974] E. Oeljeklaus und R. Remmert: *Lineare Algebra I*. Berlin Heidelberg : Springer, 1974 (Heidelberger Taschenbücher 150). – DOI [10.1007/978-3-642-65851-8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-65851-8)
- [OS1977] D. S. Ornstein und M. Smorodinsky: *Ergodic flows of positive entropy can be time changed to become K-flows*. In: Israel Journal of Mathematics 26 (1977), Nr. 1, 75–83. – DOI [10.1007/bf03007657](https://doi.org/10.1007/bf03007657)
- [PR2004] M. Passare und H. Rullgård: *Amoebas, Monge-Ampère measures, and triangulations of the Newton polytope*. In: Duke Mathematical Journal 121 (2004), Nr. 3, S. 481–507. – DOI [10.1215/S0012-7094-04-12134-7](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-04-12134-7)
- [PY1979] G. Pianigiani und J. A. Yorke: *Expanding maps on sets which are almost invariant. Decay and chaos*. In: Transactions of the American Mathematical Society 252 (1979), 351–366. – DOI [10.1090/S0002-9947-1979-0534126-2](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1979-0534126-2)
- [Roc1972] R. T. Rockafellar: *Convex Analysis*. Second Printing. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1972 (Princeton Mathematical Series 28)
- [Tot1970] H. Totoki: *On a class of special flows*. In: Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete 15 (1970), Nr. 2, S. 157–167. – DOI [10.1007/bf00531884](https://doi.org/10.1007/bf00531884)
- [Wal2000] P. Walters: *An Introduction to Ergodic Theory*. First softcover printing. New York : Springer-Verlag, 2000 (Graduate Texts in Mathematics 79)
- [Wer2007] D. Werner: *Funktionalanalysis*. 6., korrigierte Auflage. Berlin Heidelberg : Springer, 2007 (Springer-Lehrbuch). – DOI [10.1007/978-3-540-72536-7](https://doi.org/10.1007/978-3-540-72536-7)